Corso di laurea in Matematica Corso di Analisi Matematica 1-2
Dott.ssa Sandra Lucente [1]

Numeri Complessi.

Nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è possibile risolvere tutte le equazioni algebriche; ad esempio, l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ammette alcuna soluzione reale. L'insieme dei numeri complessi permetterà di risolvere in modo definitivo tale problema nel senso che, in tale insieme, tutte le equazioni algebriche ammetteranno almeno una soluzione. Tuttavia in tale estensione si perdono alcune proprietà importanti di $\mathbb{R}$, come quelle relative alla relazione d'ordine: nell'insieme dei numeri complessi non è possibile definire una relazione d'ordine totale compatibile con le operazioni algebriche.

I numeri complessi appaiono per la prima volta nella letteratura matematica per le formule di risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado di Tartaglia alla fine del 1500. Inizialmente i numeri complessi non vengono considerati come "numeri", ma solo come artifici algebrici utili a risolvere equazioni. Cartesio (1596-1650) li chiama "numeri immaginari". Solo nel 1700 de Moivre ed Eulero iniziano a fornire ai numeri complessi una base teorica, infine nei lavori di Gauss (1777-1855) se ne trova uan definitiva sistematizzazione.

1. La forma geometrica

Definiamo le operazioni di addizione e moltiplicazione sull'insieme dei punti del piano

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(a, b)\,|a, b \in \mathbb{R}\}$$

In $\mathbb{R}^2$ l'addizione viene definita ponendo, per ogni $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$

$$(a, b) +_{\mathbb{C}} (c, d) = (a + c, b + d).$$

La moltiplicazione di $\mathbb{R}^2$ viene invece definita nel seguente modo, per ogni $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$, si pone

$$(a, b) \cdot_{\mathbb{C}} (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Proposizione 1. $\mathbb{R}^2$ munito delle recedenti operazioni è un campo. Esso viene denominato *insieme dei numeri complessi* e denotato con $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Dimostrazione. Si dimostra facilmente che l'addizione $(a, b)+_{\mathbb{C}}(c, d) = (a+c, b+d)$ verifica le proprietà associativa e commutativa, l'elemento neutro $0_{\mathbb{C}}$ è dato dalla coppia $(0, 0)$ l'opposto di (a, b), che si denota con $-_{\mathbb{C}}(a, b)$, è la coppia $(-a, -b)$.
Anche per la moltiplicazione è facile riconoscere la validità delle proprietà associativa e commutativa, la distributività rispetto alla addizione, l'esistenza dell'elemento neutro $1_{\mathbb{C}}$ dato dalla coppia $(1, 0)$. Per ogni $(a, b) \neq (0, 0)$, si prova l'esistenza dell'elemento inverso (reciproco di (a, b)) che si denota con $(a, b)^{-1}$ oppure con $\frac{1}{(a,b)}$, ed è dato dalla coppia

$$\frac{1}{(a, b)}_{\mathbb{C}} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

esplicitamente

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \cdot_{\mathbb{C}} (a, b) = (1, 0).$$

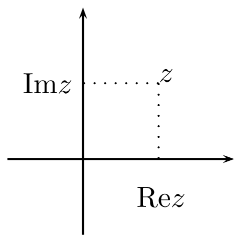
□

Osserviamo in particolare che

$$(0, \pm 1)(0, \pm 1) = -(1, 0)$$

[1]Questi appunti potrebbero contenere sviste ed errori, vi prego di segnalarmeli, ad esempio via email. Versione del 25-01-08

ovvero in $\mathbb{C}$ abbiamo due soluzioni dell'equazione $z^2 + 1 = 0$ non risolubile in $\mathbb{R}$.
Se $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, il numero (reale) a viene denominato *parte reale di* z e denotato con $\mathrm{Re} z$, mentre il numero (reale) b viene denominato *parte immaginaria* di z e denotato con il simbolo $\mathrm{Im} z$. In questo modo un numero complesso z può essere rappresentato come $z = (\mathrm{Re} z, \mathrm{Im} z)$. La coppia $(\mathrm{Re} z, \mathrm{Im} z)$ viene anche denominata *forma geometrica di* z. Si preferisce parlare di *piano complesso* anzichè di piano cartesiano e di *asse reale* e *asse immaginario* anzichè di asse delle ascisse e rispettivamente delle ordinate.



Proposizione 2. **Principio di identità.** Siano $z = (\mathrm{Re}(z), Im(z))$ e $w = (\mathrm{Re}(w), \mathrm{Im}(w))$ due numeri complessi. Si ha $z = w$ se e solo se $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ e $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$.

2. La forma algebrica

Vediamo che in un oportuno senso l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali può essere considerato come un sottoinsieme di $\mathbb{C}$, in quanto può essere identificato con il seguente sottoinsieme di $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{R}' := \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Proposizione 3. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ tale che $\varphi(a) = (a, 0)$. Allora

(1) $\mathbb{R}'$ è un sottocampo di $\mathbb{C}$
(2) φ è un isomorfismo di anelli unitari.

Dimostrazione. Si osserva subito che $0_{\mathbb{C}} \in \mathbb{R}'$ e $1_{\mathbb{C}} \in \mathbb{R}'$. Si prova facilmente che $\mathbb{R}'$ è chiuso rispetto alle operazioni $+_{\mathbb{C}}$ e $\cdot_{\mathbb{C}}$, in particolare l'opposto e il reciproco di un numero complesso (non nullo) di $\mathbb{R}'$ sono ancora elementi di $\mathbb{R}'$.
Notiamo che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ risulta

$$\begin{aligned}
&\varphi(x +_{\mathbb{R}} y) = (x +_{\mathbb{R}} y, 0) = (x, 0) +_{\mathbb{C}} (y, 0) = \varphi(x) +_{\mathbb{C}} \varphi(y) \\
&\varphi(x \cdot_{\mathbb{R}} y) = (x \cdot_{\mathbb{R}} y, 0) = (x, 0) \cdot_{\mathbb{C}} (y, 0) = \varphi(x) \cdot_{\mathbb{C}} \varphi(y) \\
&\varphi(1_{\mathbb{R}}) = 1_{\mathbb{C}}
\end{aligned}$$

In particolare $\varphi(a^{-1}) = (\frac{1}{a}, 0) = (a, 0)^{-1} = \varphi(a)^{-1}$.
Resta da provare la bigettività di φ. L'ingettività segue dalla definizione di uguaglianza tra coppie, la surgettività è banale. $\square$

Per semplicità di scrittura, d'ora in poi ometteremo l'indice $\mathbb{C}$ nelle notazioni di somma e prodotto.
Osserviamo anche che $\mathbb{C}$ può essere munito di una struttura di spazio vettoriale reale: per $a \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{C}$ si pone

$$a(x, y) = (ax, ay).$$

In base alla precedente proposizione ha senso per $a \in \mathbb{R}$ dire che $a \in \mathbb{C}$ poichè si identififica a con $(a, 0)$ ovvero

$$a = (a, 0) = a(1, 0) = a1_{\mathbb{C}}.$$

D'altra parte per le coppie che si trovanno sull'asse delle ordinate, risulta

$$(0, b) = b(0, 1).$$

In generale

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1).$$

Per questa proprietà l'elemento $(0, 1)$ merita una denominazione apposita:

$$(0, 1) =: \mathrm{i}$$

e dicesi *unità immaginaria. In particolare* $\mathrm{i}^2 = -1$. Risulta

$$(a, b) = a + \mathrm{i}\, b;$$

si ottiene così un'espressione diversa del numero complesso z, detta *forma algebrica di* z.
Un numero complesso del tipo $(0, b)$ in forma geometrica, ovvero $\mathrm{i}\, b$ in forma algebrica si chiama *immaginario puro.*

Esercizio 1. Lo studente colleghi la forma algebrica di un numero complesso con la rappresentazione dei vettori di $\mathbb{R}^2$ mediante la base canonica di $\mathbb{R}^2$ data da $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (0, 1)$.

Si riconsiderano ora le operazioni descritte sopra utilizzando la forma algebrica. Siano $z = a + \mathrm{i}\, b$ e $w = c + \mathrm{i}\, d$ elementi di $\mathbb{C}$. Allora

$$(a + \mathrm{i}\, b) + (c + \mathrm{i}\, d) = (a + c) + \mathrm{i}\,(b + d),$$
$$(a + \mathrm{i}\, b)(c + \mathrm{i}\, d) = (ac - bd) + \mathrm{i}\,(ad + bc).$$

Ricordando che $\mathrm{i}^2 = -1$, si vede che l'addizione e la moltiplicazione in forma algebrica seguono le regole classiche della somma e del prodotto di due binomi.
Inoltre, $-z = -a + \mathrm{i}\,(-b)$ e, se $z \neq 0$,

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \mathrm{i}\, \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Conviene tenere presente, inoltre, che calcolando le potenze dell'unità immaginaria i, si ottiene

$$\mathrm{i}^0 = 1, \quad \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^2 = -1, \quad \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^4 = 1, \quad \cdots;$$

come si vede, le potenze di i si ripetono di quattro in quattro, cioè vale la proprietà $\mathrm{i}^{p+4} = \mathrm{i}^p$ per ogni $p \in \mathbb{N}$.

Proposizione 4. **Principio di identità.** Siano $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\, Im(z)$ e $w = \mathrm{Re}(w) + \mathrm{i}\, \mathrm{Im}(w)$ due numeri complessi. Si ha $z = w$ se e solo se $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ e $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$.

2.1. **Il coniugato e il modulo di un numero complesso.**

Lemma 1. Se $z = a + \mathrm{i}\, b$ è soluzione di una equazione di secondo grado a coefficienti reali, anche $w = a - \mathrm{i}\, b$ lo è.

Dimostrazione. Siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0_{\mathbb{C}}$. Per il principio di identità, ciò equivale a chiedere

$$\alpha a^2 - \alpha b^2 + \beta a + \gamma = 0_{\mathbb{R}}$$
$$2\alpha ab + \beta b = 0_{\mathbb{R}}.$$

Sottraendo le precedenti due espressioni si ottiene $\alpha w^2 + \beta w + \gamma = 0_{\mathbb{C}}$. ∎
Assegnato, quindi, un numero complesso $z = a + \mathrm{i}\, b$, ha un ruolo sicuramente importante il numero complesso $a - \mathrm{i}\, b$, che ha la stessa parte reale di z, ma parte immaginaria opposta; esso viene denominato *numero complesso coniugato di* z e denotato con

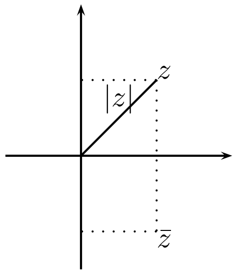
$$\bar{z} = a - \mathrm{i}\, b \text{ se } z = a + \mathrm{i}\, b.$$

In particolare $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\bar{z})$ e $\mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.
Come si vede dal calcolo del reciproco di un numero complesso diverso da zero, è anche utile associare ad ogni numero complesso $z = a + ib$, il numero reale $a^2 + b^2$, denotando

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

che prende il nome di *modulo di* z.

L'uso dello stesso simbolo che rappresenta il valore assoluto di un numero reale non dà luogo ad equivoci in quanto, se si considera un numero reale $a \in \mathbb{R}$ come numero complesso della forma $z = a + \mathrm{i} \cdot 0$, si ha $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|^2$.
Nel piano complesso, il coniugato di un numero complesso z è il simmetrico di z rispetto all'asse reale mentre il modulo rappresenta la distanza di z dall'origine.



Proposizione 5. Per ogni $z = a + \mathrm{i}\, b \in \mathbb{C}$ e $w = c + \mathrm{i}\, d \in \mathbb{C}$, valgono le seguenti proprietà:

(1) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z}\bar{w}$.
(2) $\bar{\bar{z}} = z$.
(3) $z = \bar{z}$ se e solo se $z \in \mathbb{R}$.
(4) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re} z$, $z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\ \mathrm{Im} z$.
(5) $z\bar{z} = |z|^2$.
(6) $|-z| = |z|$.
(7) $|\bar{z}| = |z|$.
(8) $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$
(9) $|zw| = |z||w|$.
(10) Se $z \neq 0$, allora $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.
(11) $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$, $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$
(12) $|z + w| \leq |z| + |w|$; .
(13) $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Dimostrazione. Le prime otto proprietà seguono facilmente dalle definizioni. Per la (9) si utilizza la (1) e la (5):

$$|zw|^2 = (zw)\overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2.$$

Dalla proprietà (5) segue in particolare che

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \tag{*}$$

Inoltre è facile mostrare che $|\alpha z| = \alpha|z|$ per $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $z \in \mathbb{C}$. Da (*) deduciamo allora la (10):

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right| = \frac{|z|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}.$$

Per la (11) si ha che

$$\mathrm{Re}(z) \leq |\,\mathrm{Re}(z)| = \sqrt{(\,\mathrm{Re}(z))^2} \leq \sqrt{(\,\mathrm{Re}(z))^2 + (\,\mathrm{Im}(z))^2} = |z|.$$

Analogamente per $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$.
Per dimostrare la (12), ovvero la disuguaglianza traingolare, si utilizza la (11):

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^+ 2\,\mathrm{Re}(zw) \leq |z|^2 + |w|^+ 2|zw| = (|z| + |w|)^2.$$

La (13) discende dalla (12) come differenza delle disuguaglianze

$$|z| \leq |z - w| + |w|$$
$$|w| \leq |z - w| + |z|.$$

$\square$

Le proprietà (1),(2),(3) ci dicono che l'applicazione $\mathcal{C} : z \mapsto \bar{z}$ è un omomorfismo di anelli a quadrato identico che fissa tutti e soli i numeri reali.

Dalla proprietà (1) segue che $(\bar{z})^2 = \bar{z}\bar{z} = \overline{zz} = \overline{(z^2)}$. In generale, per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $z \in \mathbb{C}$ risulta

$$(\bar{z})^n = \overline{(z^n)}$$

Dalla proprietà (10) segue che $|z|^2 = |z||z| = |zz| = |z^2|$. In generale, per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $z \in \mathbb{C}$ risulta

$$|z|^n = |z^n|$$

Posto $z = \mathrm{i}$ in (*) otteniamo

$$1/\mathrm{i} = -\mathrm{i}\,.$$

Dalla (5) si ricava anche la seguente formula

$$\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2} \quad z \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}^*$$

Possiamo ora generalizzare il Lemma 1

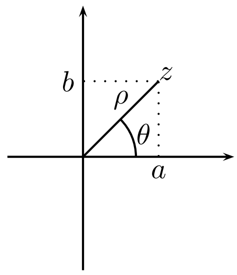
Definizione 2.1. Siano $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ con $a_n \neq 0$ e si consideri il polinomio $P(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$. Si denomina *polinomio coniugato di P*,e si denota con P il polinomio $\bar{P}(z) = \bar{a}_0 + \dots + \bar{a}_n z^n$.

Quindi il polinomio coniugato di un polinomio P ha come coefficienti i coniugati dei coefficienti di P. Se P ha grado n, anche il polinomio coniugato ha grado n.
Un polinomio coincide con il suo polinomio coniugato se e solo se esso è a coefficienti reali.
Per quanto riguarda le radici del polinomio coniugato, vale la proprietà seguente.

Proposizione 6. Se P è un polinomio e $z_0 \in \mathbb{C}$ è una radice di P, allora $\bar{z}_0$ è una radice del polinomio coniugato $\bar{P}$.

Dimostrazione. Siano $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ con $a_n \neq 0$ tali che $P(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$. Allora, dalla definizione precedente, $\bar{P}(\bar{z}_0) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{z}_0 + \dots + \bar{a}_n\bar{z}_0^n = \overline{a_0 + \dots + a_n z_0^n} = \overline{P(z_0)}$ e quindi si ha $P(z_0) = 0$ se e solo se $\bar{P}(\bar{z}_0) = 0$. □
In particolare polinomi a coefficienti reali che ammettono una radice complessa, ammettono anche la radice complessa e coniugata.

3. La forma trigonometrica



Ad ogni punto $P \neq (0,0)$ del piano complesso si possono associare coppie (ρ, θ) con $\rho > 0$ che rappresenta la distanza del punto dato dall'origine e $\theta \in \mathbb{R}$ che rappresenta l'angolo determinato dall'asse reale positivo e dalla retta passante per l'origine e il punto dato. Il numero $\rho > 0$ viene denominato *modulo* (oppure *raggio vettore*) di P, mentre il numero θ viene denominato *argomento* (oppure *anomalia*) di P. Bisogna osservare che l'argomento non è individuato univocamente; infatti se ϑ è un argomento di P, ogni altro numero del tipo $\vartheta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, è ancora un argomento di P. Tuttavia, esiste sicuramente uno ed un solo argomento ϑ di P che verifica $-\pi < \vartheta \leq \pi$; tale argomento viene denominato *argomento principale di P*. Per il punto $(0,0)$ si conviene di scegliere $\rho = 0$ e $\vartheta = 0$.
Assegnato $z = a + \mathrm{i}\,b$ si individua il punto (a, b) a cui corrisponde il modulo

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e l'argomento $\theta \in \mathbb{R}$ che risolve

$$\cos\theta = a/\rho$$

$$\operatorname{sen}\theta = b/\rho$$

Sia ϑ l'argomento principale che risolve la precedente equazione.

- Se $a = 0$ e $b > 0$ allora $\vartheta = \pi/2$;
- Se $a = 0$ e $b > 0$ allora $\vartheta = -\pi/2$
- Se $a \neq 0$ allora si deve risolvere l'equazione $\mathrm{tg}\vartheta = b/a$.

Viceversa assegnati $\rho > 0$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$ si individua il punto del piano di coordinate

$$a = \rho \cos\theta$$

$$b = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

ovvero il numero complesso

$$z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\theta)$$

che viene denominata *forma trigonometrica di z.*

Proposizione 7. **Principio di identità.** Siano $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\theta)$ e $w = \sigma(cos\varphi + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\varphi)$ due numeri complessi non nulli. Si ha $z = w$ se e solo se $\rho = \sigma$ ed esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\theta = \varphi + 2k\pi$.

Le operazioni di somma e differenza di due numeri complessi non sono immediate in forma trigonometrica e per tali operazioni conviene utilizzare soprattutto la forma algebrica o geometrica. Al contrario, le operazioni di prodotto, reciproco, quoziente, potenza si possono eseguire in modo molto semplice utilizzando proprio la forma trigonometrica. Ad esempio si dimostra che il prodotto in forma trigonometrica di due numeri complessi z e w ha come modulo il prodotto dei moduli di z e di w e come argomento la somma degli argomenti di z e di w. Da questa prprietà si deducono quelle del reciproco e della potenza

Proposizione 8. Siano $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\theta)$ e $w = \sigma(cos\varphi + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\varphi)$ due numeri complessi.

(14) $zw = \rho\sigma(\cos(\theta + \varphi) + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,(\theta + \varphi))$
(15) $z^{-1} = \rho^{-1}(\cos\theta - \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,(\theta))$
(16) $z/w = \rho/\sigma(\cos(\theta - \varphi) + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,(\theta - \varphi))$
(17) $z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,(n\theta))$ (Formula di De Moivre)

Dimostrazione. Per la (14) si utilizzando le formule di addizione e sottrazione delle funzioni seno e coseno. Per la (15) si applica la (*). La (16) si ricava dalla (14) e dalla (15). Per la (17) si procede per induzione utilizzando la (14). □

Conviene tener presente che se θ e φ sono gli argomenti principali di z e rispettivamente di w, non è detto che $\theta + \varphi$ sia l'argomento principale di zw.

4. La forma esponenziale

La funzione potenza n-esima con $n \in \mathbb{N}$ viene estesa in modo naturale da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Lo stesso succede per la funzione esponenziale.

Se $z = x + \mathrm{i}\,y$ è un numero complesso, si pone

$$\mathrm{e}^z := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,y)$$

si osservi che $x, y \in \mathbb{R}$ e quindi le funzioni a secondo membro sono quelle già note nel caso reale. Se $z \in \mathbb{R}$ si ha $y = 0$ e la funzione così definita corrisponde all'esponenziale reale.

In particolare, se $\theta \in \mathbb{R}$, si ha

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\ \sin\theta;$$

conseguentemente, se si conosce la forma trigonometrica $z = \rho(cos\theta + \mathrm{i}\,sin\theta)$ di un numero complesso z si può scrivere la *forma esponenziale* di z

$$z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}.$$

È immediato passare dalla forma esponenziale a quella trigonometrica.

Proposizione 9. **Principio di identità.** Siano $z = \rho e^{i\theta}$ e $w = \sigma e^{i\varphi}$ due numeri complessi. Si ha $z = w$ se e solo se $\rho = \sigma$ ed esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\theta = \varphi + 2k\pi$.

Proposizione 10. Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}$ risulta

(18) $e^{z+w} = e^z e^w$, $e^0 = 1$.
(19) $e^z \neq 0_{\mathbb{C}}$
(20) $|e^{i\theta}| = 1$
(21) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$

Dimostrazione. La (18) segue dalla (14) e dalle proprietà dell'esponenziale reale. Per la (19) si procede per assurdo utilizzando il principio d'identità. La (20) è banale ed implica la (21). $\square$

Le formule (14)-(17) in forma esponenziale si riscrivono nel seguente modo

(14)' $|z|e^{i\theta}|w|e^{i\varphi} = zw = |zw|e^{i(\theta+\varphi)}$
(15)' $(|z|e^{i\theta})^{-1} = z^{-1} = |z|^{-1}e^{-i\theta}$
(16)' $|z|e^{i\theta}(|w|e^{i\varphi})^{-1} = z/w = |z/w|e^{i(\theta-\varphi)}$
(17)' $(|z|e^{i\theta})^n = z^n = |z|^n e^{in\theta}$ (Formula di De Moivre)

Esercizio 2. Si ricavino le *formule di Eulero*

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$

Se ne riconosce l'analogia con la definizione delle funzioni reali seno-iperbolico e coseno iperbolico.

5. Le radici di un numero complesso

Consideriamo ora le radici n-esime ($n \geq 2$) di un numero complesso $z = \rho(cos\theta + i\, sin\theta)$. Una radice di z è definita come un numero complesso $w \in \mathbb{C}$ che verifica la proprietà $w^n = z$.
L'unica radice di zero è il numero zero.
Si supponga quindi che $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \neq 0$. Se si pone $w = \sigma(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$. Usando le formule di De Moivre, abbiamo

$$w^n = \sigma^n(\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi))$$

Dal principio di uguaglianza di due numeri complessi in forma trigonometrica, $w^n = z$ è verificata se e solo se

$$\sigma = \sqrt[n]{\rho}, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Nella riga precedente $\sqrt[n]{\rho}$ indica la radice n-esima del numero reale $\rho > 0$. Si osserva che al variare di $k \in \mathbb{Z}$, i valori $\varphi = \frac{\theta+2k\pi}{n}$ danno n angoli distinti corrispondenti ai valori $k = 0, \ldots, n-1$ e forniscono tutte le radici n-esime di z.

Proposizione 11. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Sia $z = \rho(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \neq 0$. Vi sono n radici n-esime distinte di z, ovvero soluzioni dell'equazione $w^n = z$ date dalla formula

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

In particolare non abbiamo più una funzione radice n-esima!
In forma esponenziale abbiamo che $w^n = \rho e^{i\theta}$ ha soluzioni distinte $w_k = \sqrt[n]{\rho}e^{\frac{i\theta+2k\pi}{n}}$ per $k = 0, \ldots, n-1$.

6. Polinomi ed equazioni algebriche

Torniamo infine al motivo che ha portato all'introduzione dei nmeri complessi: la risoluzione delle equazioni algebriche.

Teorema 1. **Teorema fondamentale dell'algebra.** Se P è un polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi, allora esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P(z_0) = 0$.

In altri termini $\mathbb{C}$ risulta un campo algebricamente chiuso.

Corollario 1. Un polinomio a coefficienti complessi è irriducibile in $\mathbb{C}$ se e solo se ha grado uno

Corollario 2. Se $P(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ $(a_n \neq 0)$ è un polinomio di grado $n \geq 1$, allora esistono n elementi $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tali che $P(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$.

Corollario 3. Un polinomio a coefficienti reali è irriducibile in $\mathbb{R}$ se e solo se ha grado uno oppure ha grado due e discriminante strettamente negativo.

Per le dimostrazioni di questi corollari si veda [2].
Si sottolinea che gli elementi $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ sono n ma non necessariamente distinti ovvero ciascun elemento avrà una sua molteplicità. Possiamo mettere in relazione questi risultati con la Proposizione 6. Si deduce che le radici complesse non reali devono essere a due a due coniugate e quindi sono in numero pari. Pertanto si ha la seguente proprietà.

Corollario 4. Sia P un polinomio a coefficienti reali di grado $n \geq 1$, con n dispari. Allora esiste almeno una radice reale di P.

Questo risultato e il corollario 3 ci garantiscono che un polinomio $P(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ con coefficienti reali $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. si può decomporre nel modo seguente:

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{h_1} \cdots (x - x_p)^{h_p} (x^2 + b_1 x + c_1)^{k_1} \cdots (x^2 + b_q x + c_q)^{k_q}$$

dove $x_1, \ldots, x_p$ sono le radici reali di P aventi rispettivamente molteplicità $h_1, \ldots, h_p$, e $k_1, \ldots, k_q$ sono le molteplicità delle radici complesse coniugate dei termini $x^2 + b_1 x + c_1, \ldots, x^2 + b_q x + c_q$ con $\Delta_1 = b_1^2 - 4c_1 < 0, \ldots, \Delta_q = b_q^2 - 4c_q < 0$.
Poichè la somma di tutte le molteplicità deve essere n, si deve infine avere

$$h_1 + \cdots + h_p + 2(k_1 + \ + k_q) = n.$$

Testi utilizzati per questi appunti

[1] Campiti M., *Analisi Matematica I, Lezioni ed esercizi*, 1995 Liguori Editore.

[2] Di Vincenzo O. *Appunti del corso di Algebra 1 A.A. 2007-2008*