Corso di laurea in Chimica e Tecnologie Farmaceutiche
Corso di Matematica
Dott.ssa Sandra Lucente[1]

Il derivato di un insieme

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Consideriamo l'intervallo (a, b). Si dice *centro dell'intervallo* il numero reale $\frac{a+b}{2}$. Si chiama ampiezza dell'intervallo il valore $b - a$. Diremo *raggio dell'intervallo* il valore positivo $\frac{b-a}{2}$. Tali notazioni sono coerenti con la seguente definizione

Definizione 1. Assegnati $r > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ si chiama *interno sferico di centro x_0 e raggio r* l'insieme $(x_0 - r, x_0 + r)$ e si denota con il simbolo $I(x_0, r)$.

Definizione 2. Un insieme $V \subset \mathbb{R}$ si dice *intorno* di $x_0 \in \mathbb{R}$ se esiste $r > 0$ tale che $I(x_0, r) \subset V$.

Definizione 3. Un insieme $V \subset \mathbb{R}$ si dice *intorno* di $+\infty$ se esiste $a > 0$ tale che $(a, +\infty) \subset V$. Un insieme $V \subset \mathbb{R}$ si dice *intorno* di $-\infty$ se esiste $a > 0$ tale che $(+\infty, -a) \subset V$.

Si denota con $\tilde{\mathbb{R}}$ l'insieme

$$\tilde{\mathbb{R}} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

Tale notazione è formale nel senso che il nuovo insieme non ha le proprietà di campo dell'insieme $\mathbb{R}$.

Definizione 4. Sia $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ si indica con $\mathcal{I}(x_0)$ l'insieme degli intorni di x_0.

La successiva definizione è cruciale in Analisi Matematica

Definizione 5. Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice che x_0 è *punto di accumulazione per A* se in ogni intorno di x_0 cadono punti di A diversi da x_0; questa definizione può essere data equivalentemente con intorni sferici, quindi richiediamo che

$$\forall r > 0 \; I(r, x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Definizione 6. Sia $A \subset \mathbb{R}$ si indica con $Dr(A)$ e si chiama *derivato di A, l'insieme dei punti di accumulazione di A.*

Definizione 7. Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$. Si dice che x_0 è *punto isolato di A se $x_0 \in A \setminus Dr_A$, quindi se*

$$\exists r > 0 \textit{ tale che } I(x_0, r) \cup A = \{x_0\}.$$

Definizione 8. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Si dice che $+\infty$ è *punto di accumulazione per A* se in ogni intorno di $+\infty$ cadono punti di A; questa definizione può essere data equivalentemente con le semirette aperte destre, quindi richiediamo che

$$\forall a > 0 \;]a, +\infty[\cap A \neq \emptyset.$$

Esercizio 1. Si dimostra che $+\infty$ è *punto di accumulazione per A se e solo se A non è limitato superiormente.*

Definizione 9. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Si dice che $-\infty$ è *punto di accumulazione per A* se in ogni intorno di $-\infty$ cadono punti di A; questa definizione può essere data equivalentemente con le semirette aperte sinistre, quindi richiediamo che

$$\forall a > 0 \;]-\infty, -a[\cap A \neq \emptyset.$$

[1]Questi appunti potrebbero contenere sviste ed errori, vi prego di segnalarmeli, ad esempio via email. Versione del 25-10-12

Esercizio 2. Si dimostri che $-\infty$ è *punto di accumulazione per A se e solo se A non è limitato inferormente.*

Esercizio fondamentale 1. Dimostrare che

$$Dr(]a,b[) = Dr([a,b[) = Dr(]a,b]) = Dr([a,b]) = [a,b]$$
$$Dr(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = Dr(\mathbb{Q})$$

l'unico punto di accumulazione di$\mathbb{N}$ è $+\infty$.

Esercizio fondamentale 2. Sia $A = \{x = \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Dimostrare che tutti i punti dell'insiem sono isolati e zero è il solo punto di accumulazione.

0.1. **Esercizi.**

(1) Dire se $]-1,5]$ è intorno di zero
(2) Dire se l'insieme $\{2,3\} \cup]7,10[$ è intorno di $x_0 = 8$. Rispondere alla stessa domanda per $x_0 = 3$ ed $x_0 = 7$.
(3) Trovare i punti di accumulazione di $A = (-3,1] \cup (\sqrt{82}, +\infty)$. Dire se tale insieme è intorno di x_0 essendo x_0 uno dei numeri del seguente insieme $\{-3, 1, 5, 10, 0, +\infty, -\infty\}$.
(4) Dire quali punti di accumulazione ha $\mathbb{Z}$.