Cenni sulle espansioni decimali dei numeri reali

Dott.ssa Sandra Lucente [1]

1. I numeri razionali

Allo studente è richiesto di

• Comprendere le operazioni rispetto alle quali sono (risp. non sono) "chiusi" gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

• Conoscere la definizione di multiplo, divisore, numero primo e fattorizzazione dei numeri interi.

• Saper ridurre una frazione ai minimi termini. Tale riduzione è basata sulla identità

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}, \quad m \in \mathbb{N}^*.$$

• Saper trasformare una frazione in un numero decimale usando la divisione euclidea.

• Saper trasformare un numero decimale in una frazione. Il caso di allineamento decimale limitato. Il caso allineamento decimale infinito periodico (con periodo diverso da 0 e 9). Saper distinguere parte intera, antiperiodo, periodo e applicare la regola

$$a_0, a_1a_2 \dots a_k\overline{a_{k+1} \dots a_n} = a_0 + \frac{a_1a_2 \dots a_ka_{k+1} \dots a_n - a_1 \dots a_k}{\underbrace{9 \dots 9}_{n-k}\underbrace{0 \dots 0}_{k}}$$

Osservazione. Discutiamo brevemente l'impossibilità del periodo 9. Basterà considerare la questione nel caso $0, \bar{9}$. Se per assurdo esistessero $m, n \in \mathbb{N}$ primi tra loro tali che

$$\frac{m}{n} = 0, \bar{9}$$

allora $m < n$ inoltre applicando la divisione euclidea si avrebbe

$$m : n = 0 \quad \text{con resto di } 9$$

$$10m : n = 9 \quad \text{con resto di } 9$$

quindi $10m - 9n = m$ da cui $m = n$ contro la condizione $m < n$.

Come risulterà chiaro solo dopo la teoria delle serie numeriche, i numeri con periodo nove si identificano con i numeri decimali ad essi piu' vicini, ovvero

$$a_0, a_1 \dots a_n\bar{9} \equiv a_0, a_1 \dots \tilde{a_n} \quad a_n \neq 9, \tilde{a_n} = a_n + 1.$$

In questo modo le proprietà algebriche di $\mathbb{Q}$ considerato come insieme di frazioni, continuano a valere. Ad esempio sappiamo che $3 \cdot (1/3) = 1$, dovrà anche essere $3 \cdot 0, \bar{3} = 1$, per questo poniamo $0, \bar{9} \equiv 1$.

A questo punto la nostra definizione di numero razionale diventa la seguente

Definizione 1.1. I numeri razionali sono tutti e soltanto quelli che ammettono rappresentazioni decimali periodiche.

Esempio 1.1. Qual è il complementare di $\mathbb{N}$ rispetto a $\mathbb{Z}$?

Esempio 1.2. Quale dei seguenti numeri è divisibile per 6?

□ 124 □ 252 □ 412 □ 633

Esempio 1.3. Ridurre ai minimi termini i seguenti numeri razionali e darne l'espressione decimale. $x_1 = 54/18$, $x_2 = 54/19$, $x_3 = 16/30$.

[1] Questi appunti potrebbero contenere sviste ed errori, vi prego di segnalarmeli, ad esempio via email. Versione del 10 Ottobre 2012

Esempio 1.4. Sia $p/q \in \mathbb{Q}$ ridotto ai minimi termini. Dare una condizione necessaria perché l'allineamento decimale di p/q sia finito. Tale condizione è anche sufficiente?

Esempio 1.5. Scrivere sottoforma di frazione $\xi_1 = 8,9\bar{3}$, $\xi_2 = 0,8\overline{214}$, $\xi_3 = 7,54\overline{63}$, $\xi_4 = 2,31\bar{7}$.

Esempio 1.6. Qual è il più grande tra $x_1 = 43/54$, $x_2 = 26/35$? Svolgere l'esercizio anche con gli allineamenti decimali.

Esempio 1.7. Qual è il più grande tra $x_1 = 1,67\overline{51}$ e $x_2 = 1,6\overline{751}$?

Esempio 1.8. Dire se è razionale il numero

$$34,131131113111131111113....$$

ovvero dopo la virgola il 3 si alterna con sequenze sempre più lunghe di 1.

Esempio 1.9. Ridurre nella forma di un'unica frazione le espressioni

$$\frac{a/b}{c/d}, \quad \frac{a}{\frac{b}{c/d}}.$$

Esempio 1.10. Si considerino le proposizioni

$$A \text{ “}\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 \geq 0\text{”} \quad B \text{ “}\forall x \in \mathbb{Z} : x^3 \leq 0\text{”}$$

Dire se A è vera, B è vera. Scrivere $\neg A$, $\neg B$.

Esempio 1.11. Dire se sono equivalenti le proposizioni

$$C \text{ “}\forall y \in \mathbb{Z} \exists x \in \mathbb{Z} : x + y \text{ divisibile per2 ”}$$

$$D \text{ “}\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} x + y \text{ divisibile per2 ”}$$

Esempio 1.12. Si considerino le proposizioni

$$C_1 \text{ “Se esiste un allineamento decimale tale che}$$
$$x = a_0, a_1 \dots a_n \dots \text{ con } a_0 \in \mathbb{Z},\ a_i \in \{0, \dots, 9\} \quad i \geq 1 \text{ allora } x \in \mathbb{Q} \text{ ”}$$

$$C_2 \text{ “Se } x \in \mathbb{Q} \text{ esiste un allineamento decimale finito o periodico tale che}$$
$$x = a_0, a_1 \dots a_n \dots \text{ con } a_0 \in \mathbb{Z},\ a_i \in \{0, \dots, 9\} \quad i \geq 1 \text{ eccetto il periodo 9”}$$

$$C_3 \text{ “Se } x \in \mathbb{Q} \text{ esiste un allineamento decimale finito tale che}$$
$$x = a_0, a_1 \dots a_n \text{ con } a_0 \in \mathbb{Z},\ a_i \in \{0, \dots, 9\} \quad i \geq 1 \text{ ”}$$

Stabilire se C_1 è vera, C_2 è vera, C_3 è vera. Per quelle false giustificare la risposta.

2. I numeri reali

Definizione 2.1. I numeri irrazionali sono tutti e soltanto quelli che hanno rappresentazione decimale infinita non periodica. $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri razionali e irrazionali

2.1. Approssimazioni ed arrotondamento.

È fondamentale per gli esercizi delle scienze applicate che si incontrano in tutto il corso di laurea saper approssimare un numero reale alla k-esima cifra e saper stimare l'errore nella approssimazione. Infatti i numeri macchina, cioè i numeri disponibili su un qualsiasi calcolatore, hanno sempre un numero di cifre decimali finito, quindi non sono mai numeri irrazionali, ma una loro approssimazione. Approssimare vuol appunto dire sostituire al numero reale un numero razionale ad esso vicino e sapere di quanto al piu' ci si sta allontanado dal numero originario. Esempio

$$\pi = 3,14159265358979323846264338....$$

Quindi 3 approssima π con errore non più grande di $2/10$. Possiamo fare di meglio: $3,1$ approssima π con un errore non più grande di $5/100$. Ancora meglio $3,14$ approssima π con un errore non più grande di $2/1000$. In altre parole $2/1000$ è una stima dell'errore che commettiamo quando diciamo che $\pi \simeq 3.14$. Guardando alla quarta cifra decimale possiamo fare una stima più precisa dell'errore: $\pi = 3.14 + \varepsilon$ con $\varepsilon \leq 16/1000$.

Definizione 2.2. Si dice che $q \in \mathbb{Q}$ è una approssimazione per difetto di $x \in \mathbb{R}$ se $q \leq x$. Si dice che $q \in \mathbb{Q}$ è una approssimazione per eccesso di $x \in \mathbb{R}$ se $q \geq x$. Approssimando x con $q \in \mathbb{R}$ si ha un errore

$$\varepsilon = |x - q|.$$

Si chiama stima dell'errore una quantità maggiore dell'errore.

Ogni numero reale ammette infinite approssimazioni per difetto e infinite approssimazioni per eccesso. Il problema è scegliere le approssimazioni che hanno un errore più piccolo di una quantità da noi scelta.
La prima possibilità è quella delle **approssimazioni per troncamento.**

Definizione 2.3. Sia dato un numero reale

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

Si chiama approssimazione per troncamento alla k-esima cifra il numero

$$q = a_0, a_1 \ldots a_k \in \mathbb{Q}.$$

Proposizione 2.1. *L'errore che si commette approssimando x con il suo troncamento alla k-esima cifra è stimabile con 10^{-k}.*

Un altra possibilità è quella delle **approssimazioni per arrotondamento.**

Definizione 2.4. Sia dato un numero reale

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

Si chiama approssimazioni per arrotondamento alla k-esima cifra il numero

$$q = a_0, a_1 \ldots \tilde{a}_k \in \mathbb{Q} \quad \tilde{a}_k = \begin{cases} a_k & se\ a_k = 0, 1, 2, 3, 4 \\ a_k + 1 & se\ a_k = 5, 6, 7, 8, 9 \end{cases}$$

Il vantaggio rispetto alle approssimazioni per troncamento è che la stima dell'errore viene dimezzata.

Proposizione 2.2. *L'errore che si commette approssimando x con il suo arrotondamento alla k-esima cifra è stimabile con $10^{-k}/2$.*

Molte volte la misura di una grandezza viene data nella forma $x = q \pm \epsilon$. Si vuole indicare che $q - \varepsilon \leq x \leq q + \varepsilon$.

Esempio 2.3. Usando la calcolatrice tascabile calcolare

$$(\sqrt[3]{7} - 1000 + 1000)^3.$$

Quale risultato invece ci si aspettava?

Esempio 2.4. Dati $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = 43/52$, $x_3 = \pi$ calcolare con troncamento alla quarta cifra decimale $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$, $8x_2$. Calcolare gli stessi valori per arrotondamento.

Esempio 2.5. Dare una approssimazione di π con errore inferiore a 10^{-6}, una con errore inferiore a $10^{-6}/2$. Trovare un δ che renda vera l'espressione

$$\pi \simeq 3,14159265358979323846264338 \pm \delta.$$