Corso di laurea in Matematica Corso di Analisi Matematica 1-2

Dott.ssa Sandra Lucente[1]

Funzioni: Nozioni generali.

Definizioni iniziali

- Si assume che lo studente conosca la definizione formale di *funzione* e che quindi la riconosca in una legge $f : A \to B$ che ad ogni elemento di A (detto dominio della funzione) fa corrispondere un unico elemento di B (detto codominio della funzione). Si sappia quindi definire il *grafico* di f.
- Lo studente sappia descrivere l'immagine diretta e inversa di un insieme mediante la funzione data.
- Una funzione è *ingettiva* se $(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall\, x_1, x_2 \in A)$
- Una funzione è *surgettiva* se $B = f(A) = \{y \in B \,|\, f(x) = y\}$
- Si assume che lo studente sappia considerare le *restrizioni, i prolungamenti*, e la *ridotta* di una funzione assegnata su opportuni insiemi dati.
- Una funzione è *bigettiva* se è ingettiva e surgettiva. Si assume che lo studente sappia considerare l'*inversa* di una funzione bigettiva e per funzioni ingettive sappia considerare l'inversa della ridotta della funzione data. A volte è possibile restringere la funzione ad un sottoinsieme su cui essa è ingettiva e considerare l'inversa della ridotta della restrizione.
- Lo studente deve saper riconoscere quando è possibile comporre due funzioni e calcolare l'espressione analitica della *funzione composta.*

Esercizio 1. Sia P un punto del piano euclideo. Sia $A = \{\text{rette del piano}\}$ e si considera $F_P : A \to A$ tale che $F_P(r) =$ retta per P parallela ad r.
Rispondere ai seguenti questiti:

- F_P è una funzione?
- F_P è ingettiva?
- Qual è il codominio di F_P?
- F_P è surgettiva?
- Sia $Q \neq P$ qual è l'immagine dell'insieme $B = \{\text{fascio di rette per Q}\}$?
- La restrizione di F_P a B è surgettiva?
- La restrizione di F_P a B è ingettiva?

Esercizio 2. Siano $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2x - 2$. Calcolare $f(8)$, $g(\pi)$. Determinare l'espressione analitica di $f \circ g$, di $g \circ f$. Dire se le funzioni date sono ingettive, surgettive ed eventualmente trovare l'inversa. Descrivere $f^{-1}([5, +\infty))$ e $g([0, 1])$

Esercizio 3. Siano $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + x$ ed $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Calcolare $F(x) = h(g(x), f(x))$

Esercizio 4. Siano $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \sqrt{x^3 + 1}$. Qual è il dominio di tali funzioni? Calcolare $f \circ g$, $g \circ f$ e descrivere il loro dominio.

Esercizio 5. Dare esempi di funzioni involutorie, cioè che ha inversa uguale alla funzione di partenza. In particolare trovare un esempio $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$.

Esercizio 6. Qual è l'inversa della funzione $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ che definisce il successore?

[1]Questi appunti potrebbero contenere sviste ed errori, vi prego di segnalarmeli, ad esempio via email. Versione del 4-11-10

Esercizio 7. Trovare almeno due diversi prolungamenti $\tilde{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ della funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(n) = n^2$.

Monotonia

Una funzione reale di variabile reale $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ si dice *monotona* se verifica una delle seguenti proprietà

- f è *crescente* se: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- f è *decrescente* se: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$
- f è *strettamente crescente* se: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- f è *strettamente decrescente* se: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Una funzione è *strettamente monotona* se è stettamente crescente o strettamente decrescente.

Esercizio fondamentale 1. Le funzioni reali di variabile reale, strettamente monotone sono ingettive. Non è vero il viceversa. *Saper fornire degli esempi di funzioni ingettive non monotone.*

Esercizio fondamentale 2. Le funzioni strettamente monotone posseggono una ridotta invertibile. L'inversa di una funzione strettamente crescente è strettamente crescente, l'inversa di una funzione strettamente decrescente è strettamente decrescente.

Esercizio fondamentale 3. Dimostrare che la composizione di due funzioni monotone è monotona. In particolare, siano f, g monotone e sia ben definita $f \circ g$, allora

(1) Se f è crescente, g è crescente, allora $f \circ g$ è ......
(2) Se f è crescente, g è decrescente, allora $f \circ g$ è ......
(3) Se f è decrescente, g è crescente, allora $f \circ g$ è ......
(4) Se f è decrescente, g è decrescente, allora $f \circ g$ è ......
(5) Se f è strettamente crescente, g è crescente, allora $f \circ g$ è ......
(6) ....

Esercizio 8. Sia f una funzione reale non nulla su un dominio assegnato. Si chiama *reciproca* di f la funzione $1/f$. Se f è monotona non possiamo dire in generale che lo sia $1/f$ per via degli eventuali cambi si segno (si pensi alla funzione $f(x) = x$ ristretta a $\mathbb{R}^*$, saper spiegare perchè $1/x$ non è monotona.) Dimostrare che

(1) Se $f > 0$ ed è crescente, allora $1/f$ è decrescente,
(2) Se $f > 0$ è decrescente, $1/f$ è ......
(3) Se $f < 0$ è crescente, $1/f$ è ......
(4) Se $f < 0$ è decrescente, $1/f$ è ......

Simmetrie

Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice *simmetrico rispetto all'origine* se per ogni $x \in A$ si ha $-x \in A$.
Sia A un insieme simmetrico rispetto all'origine.

- $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *pari* se per ogni $x \in A$ risulta $f(-x) = f(x)$.
- $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *dispari* se per ogni $x \in A$ risulta $f(-x) = -f(x)$.

Le funzioni pari sono simmetriche rispetto all'asse delle ordinate, le funzioni dispari sono simmetriche rispetto all'origine.

Esercizio fondamentale 4. Esistono funzioni contemporaneamente pari e dispari?

Esercizio fondamentale 5. Dire se, nel loro dominio, hanno simmetrie le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} h(x) &= |x| \\ l(x) &= ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Esercizio fondamentale 6. Le funzioni dispari definite su un insieme simmetrico contenente $x = 0$, si annullano tutte in $x = 0$

Esercizio fondamentale 7. Sia f definita su un insieme simmetrico e invertibile in tali dominio. Se f è dispari allora f^{-1} è dispari.

Esercizio fondamentale 8. Siano f e g definite su domini simmetrici tali che $f \circ g$ sia ben definito.

(1) Se f è pari e g è pari allora $f \circ g$ è ...
(2) Se f è pari e g è dispari allora $f \circ g$ è ...
(3) Se f è dispari e g è pari allora $f \circ g$ è ...
(4) Se f è dispari e g è dispari allora $f \circ g$ è ...

In generale se g è pari, per quali f risulta $f \circ g$ pari?

Esercizio 9. Per quali insiemi A se la funzione caratteristica χ_A è simmetrica?

Esercizio 10. Trovare due funzioni non simmetriche la cui somma è una funzione simmetrica non nulla.

Limitatezza

Si considera funzione reale di variabile reale $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$

- f è *limitata superiormente* se $f(A)$ è un insieme limitato superiormente.
- f è *limitata inferiormente* se $f(A)$ è un insieme limitato inferiormente.
- f è *limitata* se è limitata sia superiormente che inferiormente.

Esercizio 11. Dire se la funzione caratteristica di un insieme assegnato è limitata, quale è il suo inf, sup e se sono eventualmente massimi o minimi.

Esercizio 12. Dire se le seguenti funzioni sono limitate superiormente (rispettivamente inferiormente) e in caso affermativo se ammettono massimo (rispettivamente minimo).

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{1}{x} \quad \text{su }]0 + \infty[\\ h(x) &= \frac{x}{1+x^2} \\ g(x) &= \begin{cases} 1 & |x| > 1 \\ x^2 & |x| \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio fondamentale 9. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $B \subset A$.

- Se f limitata superiormente allora $f_{|B}$ è limitata superiormente e $\sup f_{|B} \leq \sup f$
- Se f limitata inferiormente allora $f_{|B}$ è limitata inferiormente e $\inf f_{|B} \geq \inf f$

Esercizio fondamentale 10. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ e sia $f \leq g$.

- Se g limitata superiormente allora f è limitata superiormente e $\sup f \leq \sup g$
- Se f limitata inferiormente allora g è limitata inferiormente e $\inf f \leq \inf g$

Esercizio fondamentale 11. Dimostrare che

- Se f limitata superiormente e $\lambda > 0$ allora λf è limitata superiormente.
  Inoltre $\lambda \sup f = \sup(\lambda f)$

- Se f limitata superiormente e $\lambda < 0$ allora λf è limitata inferiormente.
  Inoltre $\lambda \sup f = \inf(\lambda f)$
- Se f limitata inferiormente e $\lambda > 0$ allora λf è limitata ... Inoltre ...
- Se f limitata inferiormente e $\lambda < 0$ allora λf è limitata ... Inoltre ...

Esercizio fondamentale 12. La somma di due funzioni limitate superiormente è una funzione limitata superiormente e $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$.
La somma di due funzioni limitate inferiormente è una funzione limitata ... e $\inf(f+g) \dots$.

Esercizio 13. Sia A un dominio simmetrico rispetto all'origine. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione dispari

- f è limitata superiormente se e solo se f è limitata inferiormente
- Se f è limitata superiormente ed esiste $\bar{\bar{x}} \in A$ tale che $\max f(x) = f(\bar{\bar{x}})$ allora f è limitata inferiormente e $\min f(x) = f(-\bar{\bar{x}})$
- Se f è limitata inferiormente ed esiste $\bar{x} \in A$ tale che $\min f(x) = f(\bar{x})$ allora f è limitata superiormente e $\max f(x) = \dots$

Periodicità

Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to B$ e $T > 0$. Si dice che f è periodica di periodo T se

(1) Per ogni $x \in A$ si ha $x \pm T \in A$
(2) Per ogni $x \in A$ risulta $f(x+T) = f(x)$.

Osservazione 0.1. Ovviamente le funzioni periodiche non sono invertibili perchè ...

Esercizio fondamentale 13. Una funzione T-periodica è anche kT-periodica per ogni $k \in \dots$. Ha quindi senso la definizione di *periodo minimo*

$$T_0 := \inf\{T > 0 \,|\, f \text{ periodica di periodo } T\}$$

Esiste una funzione con periodo minimo nullo? È unica?

Esercizio fondamentale 14. La funzione parte intera di un numero reale è periodica? Presenta simmetrie? È limitata? La funzione mantissa di un numero reale è periodica? Presenta simmetrie? È limitata?

Esercizio 14. Esistono funzioni non periodiche a somma periodica? Esistono funzioni non periodiche con prodotto periodico?

Esercizio 15. Siano f e g funzioni periodiche rispettivamente di periodo T_f e T_g. Dimostrare che se $\frac{T_f}{T_g}$ è razionale allora $f+g$ e fg sono periodiche di un opportuno periodo T. In particolare se $\frac{T_f}{T_g} = \frac{n}{p}$ allora si può scegliere $T = pT_f = nT_g$.
Questa scelta non dà però il periodo minimo.
Questa condizione è solo sufficiente ma non necessaria, cioè esistono funzioni periodiche tale che $\frac{T_f}{T_g}$ è irrazionale ma $f+g$ è periodica (esibire un esempio).
Mostrare poi un esempio di funzioni periodiche tale che $\frac{T_f}{T_g}$ è irrazionale ma $f+g$ non è periodica.

Esercizio fondamentale 15. Sia g una funzione T periodica. Per quali f risulta periodica la funzione $f \circ g$? Qual è il suo periodo?

Esercizio fondamentale 16. Se f è una funzione T periodica allora la funzione $f_{\alpha,T}(x) = f(\frac{T}{\alpha}x)$ risulta periodica di periodo ...

Esercizio 16. Dato $T > 0$ esibire una funzione T periodica. (Usare l'esercizio precedente)