Corso di laurea in Matematica Corso di Analisi Matematica 1-2

Dott.ssa Sandra Lucente [1]

Infiniti e infinitesimi.

In queste note si considerano $A, B \neq \emptyset$ con $A \subset B \neq \emptyset$. Sia $x_0 \in \tilde{R}$, $f : A \to R$ tale che $x_0 \in D_r(A)$ e $g : B \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 \in D_r(B)$. Infine si assuma che esiste un intorno $I \subset A \cap B$ di x_0 tale che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$.

Infiniti

Consideriamo f e g funzioni **infinite** in x_0 cioè

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x), \ \exists \lim_{x \to x_0} g(x)$$

e risulta

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty, \ \lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty.$$

Definizione 0.1.

- Si dice che f è un **infinito dello stesso ordine di** g **per** $x \to x_0$ se e solo se esiste $\ell \in \mathbb{R}^*$ tale che
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}^*$$
- Si dice che f è un **infinito di ordine inferiore a** g **per** $x \to x_0$ se e solo se
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$
- Si dice che f è un **infinito di ordine superiore a** g **per** $x \to x_0$ se e solo se
$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$$
- Si dice che f e g sono **infiniti non confrontabili per** $x \to x_0$ se e solo se
$$\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

A volte utilizzeremo la notazione

$$f \sim g, \text{ per } x \to x_0$$

per indicare che f e g sono infiniti dello stesso ordine per $x \to x_0$.

Proposizione 1. **Principio di sostituzione degli infiniti.** Siano f_1, f_2, g_1, g_2 infiniti per $x \to x_0$. Se f_1 è un infinito di ordine superiore a g_1 ed f_2 è un infinito di ordine superiore a g_2, allora $f_1 + g_1$ ed $f_2 + g_2$ sono infiniti confrontabili se e solo se f_1 e f_2 sono infiniti confrontabili. In questo caso inoltre

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1 + g_1}{f_2 + g_2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1}{f_2}$$

In definitiva, gli infiniti di ordine più **alto** sono quelli di cui tener conto nella risoluzione della forma indeterminata $[\frac{\infty}{\infty}]$.

Sia $x_0 = +\infty$ oppure $x_0 = -\infty$. Le potenze $|x|^\alpha$ sono infinite per $x \to \pm\infty$, ma sappiamo anche facilmente confrontarle tra loro: al crescere di α si hanno infiniti di ordine superiore. Verranno quindi utilizzate come **infiniti campione.**

[1] Questi appunti potrebbero contenere sviste ed errori, vi prego di segnalarmeli, ad esempio via email. Versione del 16-01-08

Definizione 0.2. Sia $\alpha > 0$ e $x_0 = +\infty$.

- Si dice che f è **un infinito di ordine** $\alpha > 0$ **per** $x \to +\infty$ se e solo se f è un infinito dello stesso ordine di $|x|^\alpha$ ovvero esiste $\ell \in \mathbb{R}^*$ tale che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{|x|^\alpha} = \ell \in \mathbb{R}^*$$
- Si dice che f è **un infinito di ordine inferiore ad** $\alpha > 0$ **per** $x \to +\infty$ se e solo se f è un infinito di ordine inferiore ad $|x|^\alpha$ ovvero
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{|x|^\alpha} = 0$$
- Si dice che f è **un infinito di ordine superiore a** $\alpha > 0$ **per** $x \to +\infty$ se e solo se f è un infinito di ordine superiore ad $|x|^\alpha$ ovvero
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = +\infty$$
- Si dice che f è un infinito di ordine infinitamente grande per $x \to +\infty$ se è un infinito di ordine superiore ad $\alpha > 0$ per ogni $\alpha > 0$.
- Si dice che f è un infinito di ordine infinitamente piccolo per $x \to +\infty$ se è un infinito di ordine inferiore ad $\alpha > 0$ per ogni $\alpha > 0$.

Esercizio fondamentale 1. Utilizzando l'infinito campione $|x|^\alpha$ riscrivere la definizione precedente per $x \to -\infty$.

Esercizio fondamentale 2. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. La funzione $g(x) = \frac{1}{|x-x_0|^\alpha}$ è l'infinito campione per $x \to x_0$. Ovvero diremo che f è **un infinito di ordine** $\alpha > 0$ **per** $x \to x_0$ se e solo se f è un infinito dello stesso ordine di $\frac{1}{|x-x_0|^\alpha}$ ovvero esiste $\ell \in \mathbb{R}^*$ tale che
$$\lim_{x\to x_0} |x-x_0|^\alpha f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{|x-x_0|^\alpha}} = \ell \in \mathbb{R}^*$$
Riscrivere tutta la definizione precedente utilizzando tale infinito campione per $x_0 \in \mathbb{R}$.

Proposizione 2. Se una funzione ha un ordine di infinito esso è unico.

Infinitesimi

Consideriamo funzioni f,g **infinitesime** in x_0 ovvero $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Definizione 0.3.

- Si dice che f è **un infinitesimo dello stesso ordine di** g **per** $x \to x_0$ se e solo se esiste $\ell \in \mathbb{R}^*$ tale che
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}^*$$
- Si dice che f è **un infinitesimo di ordine superiore a** g **per** $x \to x_0$ se e solo se
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$
- Si dice che f è **un infinitesimo di ordine inferiore a** g **per** $x \to x_0$ se e solo se
$$\lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$$
- Si dice che f e g sono **infinitesimi non confrontabili per** $x \to x_0$ se e solo se
$$\nexists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Quando non vi sarà possibilità di errore con la stessa notazione usata per gli infiniti, si utilizza la notazione

$$f \sim g, \text{ per } x \to x_0$$

per indicare che f e g sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \to x_0$.

Molto più frequente è la notazione

$$f = o(g, x_0), \text{ oppure semplicemente} f = o(g)$$

per indicare che f è **infinitesima di ordine superiore a g per $x \to x_0$.** Non si tratta di una uguaglianza tra funzioni ma dell'appartenenza di f all'insieme delle funzioni che verificano

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

In particolare non sussiste $o(g) - o(g) = 0$!!!
Inoltre viene usata la notazione

$$f = o(1, x_0) \text{ oppure semplicemente} f = o(1)$$

per indicare che f è infinitesima in $x = x_0$.

Proposizione 3. **Principio di sostituzione degli infinitesimi** Siano f_1, f_2, g_1, g_2 infinitesime per $x \to x_0$. Se $f_1 = o(g_1)$ ed $f_2 = o(g_2)$ allora $f_1 + g_1$ ed $f_2 + g_2$ sono infinitesimi confrontabili se e solo se g_1 e g_2 sono infinitesimi confrontabili. In questo caso inoltre

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1 + g_1}{f_2 + g_2} = \lim_{x \to x_0} \frac{g_1}{g_2}$$

In definitiva, gli infinitesimi di ordine più **basso** sono quelli di cui tener conto nella risoluzione della forma indeterminata $[\frac{0}{0}]$.

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Le potenze $|x - x_0|^\alpha$ sono infinitesime per $x \to x_0$, ma sappiamo anche facilmente confrontarle tra loro: al crescere di α si hanno infinitesimi di ordine superiore. Verranno quindi utilizzate come **infinitesimi campione.**

Definizione 0.4. Sia $\alpha > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Si dice che f è **infinitesima di ordine $\alpha > 0$ per $x \to x_0$** se e solo se f è infinitesima dello stesso ordine di $|x - x_0|^\alpha$ ovvero esiste $\ell \in \mathbb{R}^*$ tale che
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{|x - x_0|^\alpha} = \ell \in \mathbb{R}^*$$
- Si dice che f è **infinitesima di ordine superiore ad $\alpha > 0$ per $x \to x_0$** se e solo se f è infinitesima di ordine superiore ad $|x - x_0|^\alpha$ ovvero
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{|x - x_0|^\alpha} = 0$$
- Si dice che f è **infinitesima di ordine inferiore a $\alpha > 0$ per $x \to x_0$** se e solo se f è infinitesima di ordine inferiore ad $|x - x_0|^\alpha$ ovvero
$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|x - x_0|^\alpha} = +\infty$$
- Si dice che f è un **infinitesimo di ordine infinitamente grande** per $x \to x_0$ se $f = o(|x - x_0|^\alpha)$ per ogni $\alpha > 0$.
- Si dice che f è un **infinitesimo di ordine infinitamente piccolo** per $x \to x_0$ se $|x - x_0|^\alpha = o(f)$ per ogni $\alpha > 0$.

Esercizio fondamentale 3. La funzione $g(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ è l'infinitesimo campione per $x \to \pm\infty$. Ovvero diremo che f è **infinitesima di ordine** $\alpha > 0$ **per** $x \to +\infty$ se e solo se f è infinitesima dello stesso ordine di $\frac{1}{|x|^\alpha}$ ovvero esiste $\ell \in \mathbb{R}^*$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} |x|^\alpha f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{|x|^\alpha}} = \ell \in \mathbb{R}^*$$

Riscrivere la Definizione 0.4 utilizzando tale infinitesimo campione per $x \to +\infty$ (ovvero $x \to -\infty$).

Proposizione 4. Se una funzione ha un ordine di infinitesimo esso è unico.

Proposizione 5. f è infinitesima di ordine α in x_0 se e solo se $1/|f|$ è infinita in x_0 di ordine α.

Esercizio fondamentale 4. Dimostrare che f è infinitesima di ordine superiore ad α in x_0 se e solo se $1/|f|$ è infinita in x_0 di ordine superiore ad α. Più in generale f è infinitesima di ordine superiore a g in x_0 se e solo se $1/|f|$ è infinita in x_0 di ordine superiore a $\frac{1}{|g|}$.

Osservazione 0.1. Quanto detto si può riscrivere per $x \to x_0^+$ e $x \to x_0^-$.

Algebra degli infinitesimi

Proposizione 6. Siano $f = o(1, x_0)$, $g = o(1, x_0)$ e $k \in \mathbb{R}*$, $\gamma > 0$. Allora

$$\begin{aligned}
ko(f) &= o(f)\\
o(f) + o(f) &= o(f)\\
o(o(f)) &= o(f)\\
o(f + o(f)) &= o(f)\\
f \cdot o(g) &= o(fg)\\
o(f) \cdot o(g) &= o(fg)\\
|o(f)|^\gamma &= o(|f|^\gamma).
\end{aligned}$$

In particolare, per $x_0 = 0$, $f = |x|^\alpha$ e $g = |x|^\beta$ si ha

$$\begin{aligned}
ko(|x|^\alpha) &= o(|x|^\alpha)\\
o(|x|^\alpha) + o(|x|^\alpha) &= o(|x|^\alpha)\\
o(|x|^\alpha) + o(|x|^{\alpha+\beta}) &= o(|x|^\alpha)\\
o(o(|x|^\alpha)) &= o(|x|^\alpha)\\
o(|x|^\alpha + o(|x|^\alpha)) &= o(|x|^\alpha)\\
o(|x|^\alpha + |x|^{\alpha+\beta}) &= o(|x|^\alpha)\\
|x|^\alpha \cdot o(|x|^\beta) &= o(|x|^{\alpha+\beta})\\
o(|x|^\alpha) \cdot o(|x|^\beta) &= o(|x|^{\alpha+\beta})\\
(o(|x|^\alpha)|^\gamma &= o(|x|^{\alpha+\gamma}).
\end{aligned}$$

Nota finale

Su diversi testi si possono trovare notazioni differenti per le definizioni di ordine di infinito e ordine di infinitesimo. Noi abbiamo scelto le convenzioni analoghe al testo di Acerbi Buttazzo *Primo corso di Analisi Matematica*, 1997 Pitagora Editore. In altri testi vi possono essere definizioni più generali. In particolare non utilizzeremo mai la notazione "O-grande"ovvero $f = O(g)$ per infiniti o infinitesimi dello stesso ordine. Lo studente che utilizzi altri testi confronti preliminarmente le definizioni con le nostre per evitare errori.