Lezioni per il corso di Analisi 2, AA 07-08.
Dott.ssa Sandra Lucente
Argomento: Integrali generalizzati[1]

1 Integrali generalizzati su intervalli illimitati

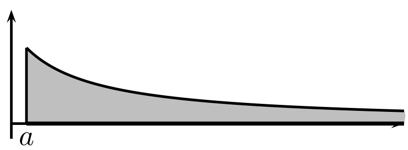
Definizione 1.1. Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se esiste il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt \tag{1}$$

esso viene denominato integrale improprio di f in $[a, +\infty[$ e denotato con il simbolo $\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt$. Ovvero

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt := \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt.$$

Se il limite (1) è un numero reale si dice che f è integrabile in senso improprio un intorno di $+\infty$ e l'integrale improprio di f è convergente.



Se il limite (1) è $+\infty$ (risp. $-\infty$), si dice che l'integrale improprio di f è divergente positivamente (risp. negativamente).

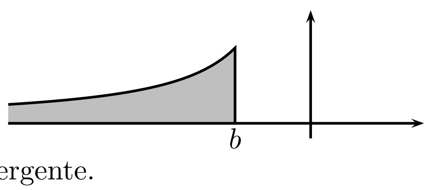
Definizione 1.2. Sia $f :]-\infty, b] \to R$ una funzione continua. Se esiste il limite

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)dt \tag{2}$$

esso viene denominato integrale improprio di f in $]-\infty, b]$ e denotato con il simbolo $\int\limits_{-\infty}^{b} f(t)dt$. Ovvero

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)dt := \lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)dt.$$

Se il limite (2) è un numero reale si dice che f è integrabile in senso improprio un intorno di $-\infty$ e l'integrale improprio di f è convergente.



Se il limite (7) è infinito, si dice che l'integrale improprio di f è divergente.

In questo paragrafo si tratta sempre con l'integrazione in un intorno di $+\infty$. I risultati si ottengono parallelamente per funzioni definite in un intorno di $-\infty$.

Combinando le proprietà elementari dei limiti con le proprietà elementari dell'integrale definito, abbiamo le seguenti proprietà di base degli integrali generalizzati, ovvero la linearità, la monotonia e l'additività.

[1]Dispensa aggiornata al 26 Maggio 2008

Proposizione 1.1. *1. Se $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ sono funzioni continue integrabili in senso improprio in $[a, +\infty[$, allora la somma $f + g$ è anch'essa integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$ e si ha*

$$\int_a^{+\infty} (f+g)(t)dt = \int_a^{+\infty} f(t)dt + \int_a^{+\infty} g(t)dt. \tag{3}$$

2. Se $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ sono funzioni continue integrabili in senso improprio in $[a, +\infty[$, e se per ogni $x \geq a$ si ha $f(x) \leq g(x)$, allora si ha anche

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt. \tag{4}$$

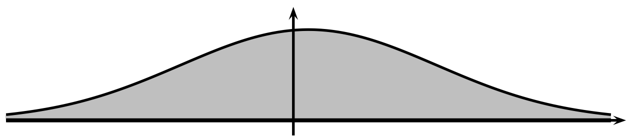
3. Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$. Sia $b > a$ allora f è integrabile in senso improprio in $[b, +\infty[$ e risulta

$$\int_b^{+\infty} f(t)dt = \int_a^{+\infty} f(t)dt - \int_a^b f(t)dt. \tag{5}$$

Accenniamo al caso di funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

Definizione 1.3. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, si dirà poi che essa è integrabile in senso improprio in $\mathbb{R}$ se esistono e sono finiti entrambi gli integrali generalizzati

$$\int_c^{+\infty} f(t)dt, \quad \int_{-\infty}^c f(t)dt$$



dove $c \in \mathbb{R}$ è fissato arbitrariamente. Se uno dei due limiti tende a $\pm\infty$ e l'altro ad un numero reale, oppure se tendono entrambi a $+\infty$ o a $-\infty$, si dice che l'integrale improprio di f è divergente (positivamente o negativamente). Utilizzando (5), si dimostra che questa definizione è ben posta, ovvero che non dipende dalla scelta di c.

Osservazione. Se esiste l'integrale improprio di f su $\mathbb{R}$ può essere calcolato anche considerando il limite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt.$$

Viceversa l'esistenza del limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt$ non comporta in generale che f sia integrabile in senso improprio in tutto $\mathbb{R}$. Se esite il limite precedente viene chiamato *integrale a valor principale* della funzione f.

Esempio 1.1. Si considera la funzione $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ essa NON è integrabile su tutto $\mathbb{R}$ perchè

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{2t}{t^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \lg(x^2+1) = +\infty$$

eppure l'integrale a valor principale esiste e risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^x \frac{2t}{t^2+1} = 0.$$

Torniamo a discutere l'integrabilità delle funzioni in un intorno di $+\infty$.

Il caso più semplice è quello di funzioni a segno costante. In tal caso è evidente il significato dell'integrale generalizzato su intervalli illimitati: si tratta dell'area racchiusa tra la funzione f e la retta delle ascisse e la retta verticale $x = a$. Si osserva che la funzione integrale

$$F : x \to \int_a^x f(t)dt \tag{6}$$

è sempre crescente se $f \geq 0$ (essendo $F' = f$) e sempre decrescente se $f \leq 0$. Quindi esiste il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

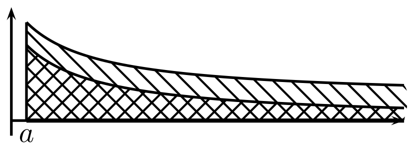
Riassumendo si ha la seguente proposizione.

Proposizione 1.2. *Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua.*

Se $f \geq 0$ allora l'integrale improprio $\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt$ converge o diverge positivamente.

Se $f \leq 0$ allora l'integrale improprio $\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt$ converge o diverge negativamente.

La Proposizione 1.2 e la proprietà di monotonia (5) ci consentono di dimostrare il primo importante criterio di convergenza per gli integrali impropri.



Teorema 1.3. Criterio del confronto per funzioni a segno costante. *Siano $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ funzioni continue tali che per ogni $x \in [a, +\infty[$ risulti $0 \leq f(x) \leq g(x)$.*

1. *Se $\int\limits_a^{+\infty} g(t)dt < +\infty$ allora $\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt < +\infty$ e risulta $\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int\limits_a^{+\infty} g(t)dt$.*

2. *Se $\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty$ allora $\int\limits_a^{+\infty} g(t)dt = +\infty$.*

Osservazione. Val la pena di osservare che, usando l'additività dell'integrale, l'ipotesi $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \geq a$ potrebbe essere indebolita richiedendo $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \geq b$ con $b > a$.

Teorema 1.4. Criterio del confronto asintotico. *Siano $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ funzioni continue strettamente positive tali che esista*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \ell.$$

1. *Sia $\ell > 0$. La funzione f è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$ se e solo se lo è g.*

2. *Sia $\ell = 0$. Se la funzione g è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$ allora lo è anche f. Se $\int_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty$ allora $\int_a^{+\infty} g(t)dt = +\infty$.*

3. *Sia $\ell = +\infty$. Se la funzione f è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$ allora lo è anche g. Se $\int_a^{+\infty} g(t)dt = +\infty$ allora $\int_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty$.*

Dimostrazione.

1. Sia $\ell > 0$. In corrispondenza di $\varepsilon = \ell/2 > 0$, per la definizione di limite, esiste $N > 0$ tale che per ogni $t > N$ risulta $\frac{\ell}{2} < \frac{f(t)}{g(t)} < \frac{3\ell}{2}$. Essendo $g > 0$ si deduce che

$$\frac{\ell}{2} g(t) < f(t) < \frac{3\ell}{2} g(t).$$

Per ottenere la tesi basta applicare il criterio del confronto e l'osservazione precedente.

2. In corrispondenza di $\varepsilon = 1$, per la definizione di limite, esiste $N > 0$ tale che per ogni $t > N$ risulta $\frac{f(t)}{g(t)} < 1$ e quindi

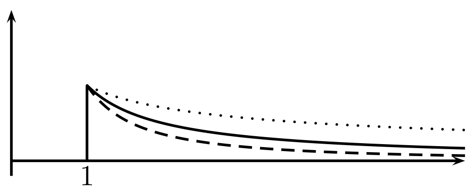
$$f(t) < g(t).$$

Mediante il criterio del confronto e l'osservazione precedente, dalle informazioni sulla integrabilità di g possiamo dedurre informazioni sulla integrabilità di f. Viceversa dalla divergenza dell'integrale improprio per f si deduce la divergenza dell'integrale improprio per g.

3. Sia $\ell = +\infty$. Basta utilizzare il punto precedente scambiando i ruoli di f e di g. □

Esempio 1.2. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(t) = t^{-\alpha}$ definita in $[1 + \infty[$ è continua in tale intervallo

Tale funzione risulta integrabile in senso improprio in $[1, +\infty[$ se e solo se $\alpha > 1$. In figura con tratto continuo è rappresentata la curva $f(t) = t^{-1}$, è tratteggiata una curva $f(t) = t^{-\alpha}$ con $\alpha > 1$ ed è a punti una curva $f(t) = t^{-\alpha}$ con $\alpha < 1$. Dimostriamo che è finita solo l'area sottostante la curva tratteggiata. Infatti



$$\int_1^x t^{-\alpha} dt = \begin{cases} \ln x & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Quindi

$$\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Utilizzando la funzione $f(t) = t^{-\alpha}$ nel criterio del confronto asintotico, si ottiene il seguente.

Corollario 1.5. *Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua strettamente positiva tali che esista*

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha} f(t) = \ell_{\alpha}.$$

1. *Sia $\ell_\alpha > 0$. L'integrale improprio di f su $[a, +\infty[$ converge se e solo se $\alpha > 1$.*
2. *Sia $\ell_\alpha = 0$. Se $\alpha > 1$ allora l'integrale improprio di f su $[a, +\infty[$ converge.*
3. *Se $\ell_\alpha = +\infty$ e $\alpha \leq 1$ allora l'integrale improprio di f su $[a, +\infty[$ diverge.*

1.1 Assoluta integrabilità

Definizione 1.4. Se $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione continua, si dice che f è *assolutamente integrabile* in senso improprio in $[a, +\infty[$ se la funzione $|f|$ è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$. Inoltre, si dice che l'integrale improprio di f è assolutamente divergente se l'integrale improprio di $|f|$ è divergente positivamente.

Dalla Proposizione 1.2 segue che ogni funzione nelle precedenti ipotesi, verifica alternativamente una delle due precedenti definizioni . Le nozioni di assoluta integrabilità in senso improprio e di integrabilità in senso improprio sono equivalenti se la funzione è positiva. Proviamo che in generale l'assoluta integrabilità è una condizione più forte della integrabilità.

Teorema 1.6. *Se $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione continua, assolutamente integrabile in un intorno di $+\infty$ allora f è integrabile in un intorno di $+\infty$ e vale la seguente relazione*

$$\left| \int_a^{+\infty} f(t)dt \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)|dt.$$

Dimostrazione. Definiamo $f^+ := max\{0, f\}$ ed $f^- := max\{0, -f\}$. Risulta

$$f^+ - f^- = f; \quad f^+ + f^- = |f|;$$
$$0 \leq f^+ \leq |f|; \quad 0 \leq f^- \leq |f|.$$

Per il teorema di confronto si ha che f^+ ed f^- sono integrabili in senso generalizzato. Ne segue che anche f è integrabile in senso generalizzato.

Dalle proprietà degli integrali definiti sappiamo che

$$\left| \int_a^x f(t)dt \right| \leq \int_a^x |f(t)|dt.$$

Essendo il valore assoluto una funzione continua, ed esistendo tutti i limiti coinvolti, possiamo passare al limite per $x \to +\infty$ e dedurre la disuguaglianza richiesta. $\square$

Corollario 1.7. Criterio del confronto per funzioni a segno qualunque. *Siano* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *e* $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *funzioni continue tali che per ogni* $x \in [a, +\infty[$ *risulti* $|f(x)| \leq g(x)$.

1. *Se* g *è integrabile in un intorno di* $+\infty$ *allora* f *è assolutamente integrabile e quindi integrabile in un intorno di* $+\infty$.

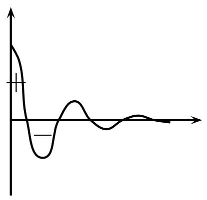
2. *Se l'integrale improprio di* f *su* $[a, +\infty)$ *è assolutamente divergente allora anche l'integrale improprio di* g *diverge positivamente.*

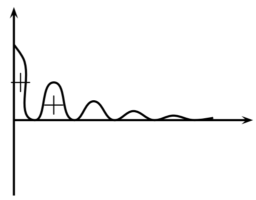
Per ottenere il precedente corollario basta utilizzare il Teorema 1.6 e il criterio di confronto 1.3.

Esempio 1.3. Esempio di funzione integrabile ma non assolutamente integrabile. In [3] dimostreremo che

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt < +\infty, \qquad \int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty.$$

Questo intuitivamente corrisponde ad una compensazione di aree positive e negative quando non vi è il valore assoluto della funzione.





2 Integrali generalizzati di funzioni non limitate

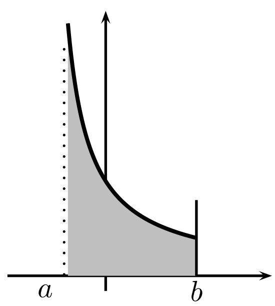
Consideriamo ora funzioni non limitate la cui illimitatezza è dovuta solo al comportamento della funzione nell'intorno del punto a, a destra di esso.

Definizione 2.1. Sia $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se esiste il limite

$$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt \tag{7}$$

esso viene denominato integrale improprio di f in $[a, b]$ e denotato con il simbolo $\int\limits_a^b f(t)dt$. Ovvero

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt.$$



Se il limite (7) è un numero reale si dice che f è integrabile in senso improprio un intorno di a e l'integrale improprio di f è convergente in a.
Se il limite (7) è $+\infty$ (risp. $-\infty$), si dice che l'integrale improprio di f è divergente positivamente (risp. negativamente) in a .

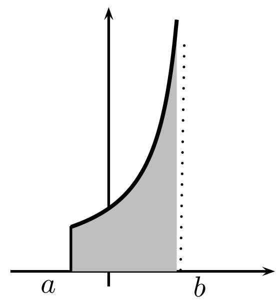
Come al solito, la definizione si può adattare al caso di funzioni che siano definite in un intervallo e illimitate vicino al secondo estremo di esso.

Definizione 2.2. Sia $f : [a, b[\to R$ una funzione continua. Se esiste il limite

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt \tag{8}$$

esso viene denominato integrale improprio di f in $[a, b]$ e denotato con il simbolo $\int\limits_a^b f(t)dt$. Ovvero

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt.$$



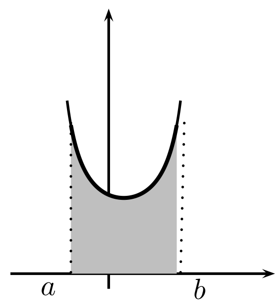
Se il limite (8) è un numero reale si dice che f è integrabile in senso improprio un intorno di b e l'integrale improprio di f è convergente.
Se il limite (8) è infinito, si dice che l'integrale improprio di f è divergente.
Richiede invece un po' di attenzione il caso di una funzione definita in un intervallo e che può presentare illimitatezza vicino ad entrambi gli estremi.

Definizione 2.3. Se $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ è una funzione continua, si dirà poi che essa è integrabile in senso improprio in $[a, b]$ se esistono e sono finiti entrambi gli integrali

$$\int_c^b f(t)dt, \quad \int_a^c f(t)dt \tag{9}$$

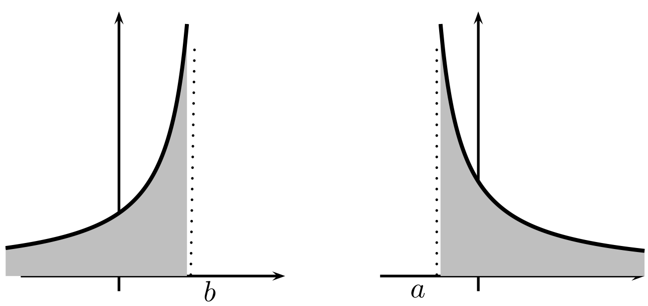
dove $c \in]a, b[$ è fissato arbitrariamente. Si pone

$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^b f(t)dt + \int_a^c f(t)dt$$



Se uno dei due integrali generalizzati in (9) diverge si dice che l'integrale improprio di f è divergente.
Mediante la proprietà di additività dell'integrale, si dimostra che questa definizione è ben posta, ovvero che non dipende dalla scelta di c.

Questa definizione ha senso anche se si considera $a = -\infty$ oppure $b = +\infty$ e si interpretano gli integrali genralizzati in (9) nel senso delle Definizioni 1.1, 1.2.



Anche in questo caso possiamo ripetere gli argomenti trattati nel precedente paragrafo. Li riscriviamo solo per funzioni illimitate nel primo estremo dell'intervallo. Tutto continua a valere nel caso di funzioni illimitate nel secondo estremo. In particolare abbiamo l'analogo della Proposizione 1.2.

Proposizione 2.1. *Sia $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.*

Se $f \geq 0$ allora l'integrale improprio $\int\limits_a^b f(t)dt$ converge o diverge positivamente.

Se $f \leq 0$ allora l'integrale improprio $\int\limits_a^b f(t)dt$ converge o diverge negativamente.

Valgono anche in questo caso i criteri di confronto e di confronto asintotico

Teorema 2.2. Criterio del confronto per funzioni a segno costante. *Siano $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ e $g :]a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue tali che per ogni $x \in]a,b]$ risulti $f(x) \leq g(x)$.*

1. *Se $\int\limits_a^b g(t)dt < +\infty$ allora $\int\limits_a^b f(t)dt < +\infty$ e risulta $\int\limits_a^b f(t)dt \leq \int\limits_a^b g(t)dt$.*
2. *Se $\int\limits_a^b f(t)dt = +\infty$ allora $\int\limits_a^b g(t)dt = +\infty$.*

Teorema 2.3. Criterio del confronto asintotico. *Siano $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ e $g :]a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue strettamente positive tali che esista*

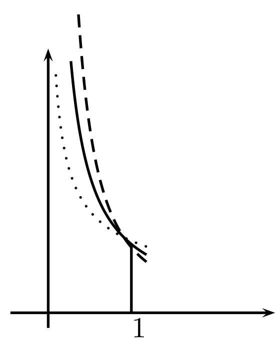
$$\lim_{t \to a^-} \frac{f(t)}{g(t)} = \ell.$$

1. *Sia $\ell > 0$. La funzione f è integrabile in senso improprio in $]a,b]$ se e solo se lo è g.*
2. *Sia $\ell = 0$. Se la funzione g è integrabile in senso improprio in $]a,b]$ allora lo è anche f.*
3. *Sia $\ell = +\infty$. Se $\int_a^b g(t)dt = +\infty$ allora $\int_a^b f(t)dt = +\infty$*

Se volessimo però riscrivere il Corollario 1.5 dovremmo prima trovare degli integrali impropri campione per la situazione che stiamo studiando

Esempio 2.1. Sia $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dimostriamo che la funzione $f(t) = (t-t_0)^{-\alpha}$ continua in $(t_0, T]$ con $T > t_0$, risulta integrabile in senso improprio in $(t_0, T]$ se e solo se $\alpha < 1$. In figura con tratto continuo è rappresentata una curva $f(t) = t^{-1}$, è a punti la curva $f(t) = t^{-\alpha}$ con $\alpha < 1$ ed è tratteggiata una curva $f(t) = t^{-\alpha}$ con $\alpha > 1$. Dimostriamo che è finita solo l'area sottostante la curva a punti.



Infatti

$$\int_x^T (t-t_0)^{-\alpha} dt = \begin{cases} \ln T - \ln(x-t_0) & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{T^{1-\alpha} - (x-t_0)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Quindi

$$\int_{t_0}^T (t-t_0)^{-\alpha} dt = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Quindi dal criterio di confronto asintotico e dal precedente esempio, segue il seguente criterio.

Teorema 2.4. *Sia $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ e $g :]a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua strettamente positiva tale che esista*

$$\lim_{t \to a} (t - a)^{\alpha} f(t) = \ell_{\alpha}.$$

1. *Sia $\ell_{\alpha} > 0$. L'integrale improprio di f su $]a, b]$ converge se e solo se $\alpha < 1$.*

2. *Sia $\ell_{\alpha} = 0$. Se $\alpha < 1$ allora l'integrale improprio di f su $]a, b]$ converge.*

3. *Se $\ell_{\alpha} = +\infty$ e $\alpha \geq 1$ allora l'integrale improprio di f su $]a, b]$ diverge.*

Infine anche per questo tipo di integrali ha senso definire l'assoluta convergenza che risulterà ancora una volta una condizione più forte della convergenza.

Definizione 2.4. Se $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, si dice che f è *assolutamente integrabile* in senso improprio in $[a, b]$ se la funzione $|f|$ è integrabile in senso improprio in $[a, b]$. Inoltre, si dice che l'integrale improprio di f è assolutamente divergente se l'integrale improprio di $|f|$ è divergente.

Teorema 2.5. *Se $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, assolutamente integrabile in un intorno di a allora f è integrabile in un intorno di a e vale la seguente relazione* $\left| \int\limits_a^b f(t)dt \right| \leq \int\limits_a^b |f(t)|dt.$

Corollario 2.6. Criterio del confronto per funzioni a segno qualunque. *Siano $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ e $g :]a, b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue tali che per ogni $x \in]a, b]$ risulti $|f(x)| \leq g(x)$.*

1. *Se g è integrabile in $[a, b]$ allora f è assolutamente integrabile e quindi integrabile in $[a, b]$.*

2. *Se l'integrale improprio di f su $[a, b]$ è assolutamente divergente allora anche l'integrale improprio di g diverge positivamente.*

3 Generalizzazioni

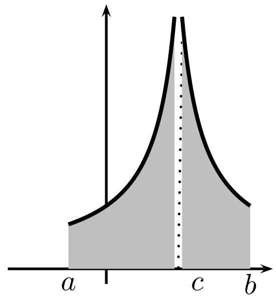
Definizione 3.1. Consideriamo infine il caso di una funzione continua in $[a, b] \setminus \{c\}$ illimitata in c punto interno ad $[a, b]$. Una siffatta funzione f si dirà impropriamente integrabile in $[a, b] \setminus \{c\}$ se f è impropriamente integrabile in $[a, c]$ e in $[c, b]$. In tal caso si pone

$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^b f(t)dt + \int_a^c f(t)dt$$

Anche in questo caso però non possiamo dedurre la convergenza dei due integrali dalla convergenza della somma dei limiti

$$\int\limits_c^b f(t)dt + \int_a^c f(t)dt = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{c+\epsilon}^b f(t)dt + \int\limits_a^{c-\epsilon} f(t)dt$$

che potrebbero nascondere forme indeterminate del tipo $[+\infty - \infty]$.



Diamo ora una più generale definizione di funzione integrabile in senso improprio.

Definizione 3.2. Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ ed $f : I \to R$ una funzione *generalmente continua.* Ovvero esistono $a_0, a_1, ..., a_{n+1} \in \hat{\mathbb{R}}$ tali che

$$\begin{aligned} &a_0 \in I \text{ oppure } a_0 = -\infty; \\ &a_1 < ... < a_n \in I; \\ &a_{n+1} \in I \text{ oppure } a_{n+1} = +\infty; \end{aligned}$$

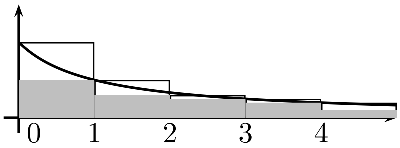
e la restrizione di f ad $I \setminus \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ sia continua. Si dice che f è integrabile in senso improprio (o generalizzato) in I se f è integrabile in senso improprio in ciascun intervallo $]a_i, a_{i+1}[$, in accordo con le Definizioni 1.1, 1.2, 2.3. Si chiama integrale improprio o generalizzato, il numero reale

$$\int_I f(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt.$$

Osservazione. Nei precedenti paragrafi abbiamo assunto che le funzioni di cui calcolare gli integrali impropri fossero funzioni continue. Questa ipotesi può essere sostituita dalla condizione che le funzioni in oggetto siano integrabili in ogni sottointervallo $[a', b'] \subset I$ essendo I l'intervallo sul quale si sta considerando l'integrali improprio.

L'unica differenza nella trattazione è nella dimostrazione dell'integrabilità in senso improprio delle funzioni a segno costante, ovvero le Proposizioni 1.2, 2.1. In tal caso la monotonia della funzione integrale (6) segue dall'additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione e non dal segno della derivata della funzione integrale.

Ad esempio per una funzione a gradini definita in tutto $[a, +\infty[$ la definizione di integrale improprio in un intorno di $+\infty$ si adatta senza alcun problema e ci consente di dimostrare il criterio dell'integrale per le serie numeriche (si veda [3])



Riferimenti bibliografici

[1] Acerbi E., Buttazzo G., *Primo corso di Analisi Matematica*, 1997 Pitagora Editore.

[2] Campiti M., *Analisi Matematica I, Lezioni ed esercizi*, 1995 Liguori Editore.

[F] Fiorito G., *Analisi Matematica 1*, 2007 Spazio Libri Editore

[3] Lucente S., *Appunti integrativi sulle serie numeriche AA0607*, www.dm.uniba.it\~lucente.

[4] Pavone M., *Integrali impropri e funzioni integrali*, 1992 Aracne Editrice.