Corso di laurea in Matematica Corso di Analisi Matematica 1-2

Dott.ssa Sandra Lucente [1]

Tabelle per l'integrazione

Integrali elementari

L'integrale indefinito rappresenta l'insieme delle primitive di una funzione, la tabella successiva dà solo una delle primitive. Nella tabella viene sottointeso il dominio delle funzioni. La tabella ha validità su ogni INTERVALLO contenuto nell'intersezione del dominio della funzione con il dominio della primitiva. In particolare su questi INTERVALLI due primitive differiscono di una costante.

funzione	primitiva
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \alpha \neq 1$
$\frac{1}{x}$	$\lg \lvert x\rvert$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathrm{arctg} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{arcsen} x$
$\mathrm{sen} x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\mathrm{sen} x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg} x$
$\frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}$	$\mathrm{cotg} x$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\lg a}$
$\mathrm{senh} x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\mathrm{senh} x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{settsenh} x = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{settcosh} x = \lg(x + \sqrt{x^2-1})$

Integrali immediati

Dalla regola di derivazione delle funzioni composte

$$D(f(\varphi)) = f'(\varphi)\varphi'$$

si deduce la prima regola di sostituzione (ovvero quella usata per gli integrali immediati)

$$\int f'(\varphi)(x)\varphi'(x)\, d\, x = f(\varphi(x)) + C.$$

[1] Questi appunti potrebbero contenere sviste ed errori, vi prego di segnalarmeli, ad esempio via email. Versione del 20-05-08

Integrazione per parti

Dalla regola di derivazione del prodotto

$$D(fg) = f'g + fg'$$

si deduce la regola di integrazione per parti

$$\int f(x)g'(x)\,d\,x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,d\,x.$$

La funzione g (che viene sempre integrata) si chiama *fattore differenziale*,la funzione f (che viene derivata nell'integrale a secondo membro) si chiama *fattore integrale.*
Nella successiva tabella vediamo **ALCUNI** casi notevoli di integrazione per parti

integrale	fattore differenziale
$\int x^n e^{\alpha x}\,d\,x \quad n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$	$e^{\alpha x}$
$\int x^\alpha \lg x\,d\,x \quad \alpha \in \mathbb{R}$	x^n
$\int x^n \mathrm{arctg}(x)\,d\,x \quad n \in \mathbb{N}$	x^n
$\int x^n \cos x\,d\,x \quad n \in \mathbb{N}$	$\cos x$
$\int x^n \mathrm{sen} x\,d\,x \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathrm{sen} x$
$\int \mathrm{arcsen} x\,d\,x$	1
$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,d\,x$	1
$\int e^{\alpha x} \mathrm{sen}\beta x\,d\,x \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$e^{\alpha x}$ oppure $\mathrm{sen}\beta x$
$\int e^{\alpha x} \cos\beta x\,d\,x \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$e^{\alpha x}$ oppure $\cos\beta x$
$\int \mathrm{sen}(\alpha x)\mathrm{sen}(\beta x)\,d\,x \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\mathrm{sen}\alpha x$ oppure $\mathrm{sen}\beta x$
$\int \mathrm{sen}(\alpha x)\cos(\beta x)\,d\,x \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\mathrm{sen}\alpha x$ oppure $\cos\beta x$
$\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\,d\,x \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\cos\alpha x$ oppure $\cos\beta x$

La formula di integrazione per parti si applica in generale ripetutamente e molto spesso ci si trova in una situazione del genere:

$$\int (f(x))^m g'(x)\,d\,x = h(x) + K \int (f(x))^k g'(x)\,d\,x$$

con $k \leq m$, $K \in \mathbb{R}$ ed h una opportuna funzione. Vi sono allora varie possibilità

- Ripartire con l'integrazione per parti fino a ridursi a $k < m$ con $\int (f(x))^k g'(x)\,d\,x$ facilmente calcolabile;
- Utilizzare qualche informazione algebrica che riconduca a $k = m$ ed usare una equazione in cui l'incognita è l'integrale assegnato;
- Riguardare il problema in modo parametrico rispetto ad m e costruire una successione definita per ricorrenza di tali integrali. Risolvere l'integrale base della successione e giungere quindi passo per passo all'integrale desiderato.

Integrazione di funzioni razionali con denominatore di secondo grado

Ci si può sempre ricondurre allo studio di

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,d\,x$$

Δ	ax^2+bx+c	$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,d\,x$	metodo
$\Delta>0$	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$\int \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}\,d\,x$	integrale elementare di tipo lg dopo identità dei polinomi
$\Delta=0$	$a(x+\frac{b}{2a})^2$	$\int \frac{1}{a}(x+\frac{b}{2a})^{-2}\,d\,x$	integrale elementare di tipo potenza
$\Delta<0$	$a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-\Delta}{4a}$	$\int \frac{4a}{-\Delta}\frac{1}{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1}\,d\,x$	integrale elementare di tipo arctg

Integrazione di funzioni razionali con denominatore di ordine superiore al secondo

Si considerano due polinomi P,Q tali che $degP<\deg Q=n$. Ricordiamo che un polinomio

$$Q(x)=a_0+\cdots+a_nx^n$$

con coefficienti reali $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$, $a_n\neq 0$. si può decomporre nel modo seguente:

$$Q(x)=a_n(x-x_1)^{h_1}\cdots(x-x_p)^{h_p}(x^2+b_1x+c_1)^{k_1}\cdots(x^2+b_qx+c_q)^{k_q}$$

dove $x_1,\ldots,x_p$ sono le radici reali di P aventi rispettivamente molteplicità $h_1,\ldots,h_p$, e $k_1,\ldots,k_q$ sono le molteplicità delle radici complesse coniugate dei termini $x^2+b_1x+c_1,\ldots,x^2+b_qx+c_q$ con $\Delta_1=b_1^2-4c_1<0,\ldots,\Delta_q=b_q^2-4c_q<0$. Inoltre

$$h_1+\cdots+h_p+2(k_1+\cdots+k_q)=n.$$

Riduzione in fratti semplici. Si possono trovare n numeri reali

$$A_{1,1},\ldots,A_{1,h_1}\ldots,A_{p,1},\ldots,A_{p,h_p}B_{1,1},C_{1,1},\ldots,B_{1,k_1},C_{1,k_1},\ldots,B_{l,1},C_{l,1},\ldots,B_{l,k_q},C_{l,k_q}$$

tali che

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}= \quad & \frac{A_{1,1}}{x-x_1}+\frac{A_{1,2}}{(x-x_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1,h_1}}{(x-x_1)^{h_1}}+\cdots+\frac{A_{p,1}}{x-x_p}+\frac{A_{p,2}}{(x-x_p)^2}+\cdots+\frac{A_{p,h_p}}{(x-x_p)^{h_p}}+\\ &+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{x^2+b_1x+c_1}+\frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+b_1x+c_1)^2}+\cdots+\frac{B_{1,k_1}x+C_{1,k_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{k_1}}+\\ &+\cdots+\quad\frac{B_{q,1}x+C_{q,1}}{x^2+b_qx+c_q}+\frac{B_{q,2}x+C_{q,2}}{(x^2+b_qx+c_q)^2}+\cdots+\frac{B_{q,k_q}x+C_{q,k_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{k_q}}\end{aligned}$$

Formula di Hermite. Esistono delle costanti

$$A_1,...,A_p,B_1,C_1,...,B_q,C_q$$

e un polinomio P_1 tale che $degP_1=n-p-2q-1$ tali che:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}= \quad & \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{A_h}{x-x_h}+\\ &+\frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1}+\frac{B_2x+C_2}{x^2+b_2x+c_2}+\cdots+\frac{B_qx+C_q}{x^2+b_qx+c_q}\\ &+\frac{d}{dx}\left(\frac{P_1(x)}{(x-x_1)^{h_1-1}\cdots(x-x_h)^{h_p-1}(x^2+b_1x+a_1)^{k_1-1}\cdots(x^2+b_qx+c_q)^{k_q-1}}\right)\end{aligned}$$

Integrazione per sostituzione per funzioni composte con funzioni razionali

Dalla regola di derivazione delle funzioni composte otteniamo che

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,d\,x = \int f(t)\,d\,t.$$

essendo $\varphi(x) = t$.
Indichiamo con $\mathcal{R}(f_1, \ldots, f_k)$ una funzione razionale, cioè il rapporto di due polinomi nelle variabili $f_1, \ldots, f_k$.
Nella successiva tabella riportiamo **ALCUNE** sostituzioni che riconducono un integrale in cui compaiono funzioni trascendenti o irrazionali ad integrale di quoziente di polinomi

integrale assegnato	sostituzione consigliata	integrale ottenuto
$\int \frac{\mathcal{R}(\lg x)}{x}\,d\,x$	$t = \lg x$	$\int \mathcal{R}(t)\,d\,t$
$\int \mathcal{R}(x^\alpha)x^{\alpha-1}\,d\,x$	$t = x^\alpha$	$\frac{1}{\alpha-1}\int \mathcal{R}(t)\,d\,t$
$\int \mathcal{R}(\cos(x))\mathrm{sen}x\,d\,x$	$t = \cos x$	$-\int \mathcal{R}(t)\,d\,t$
$\int \mathcal{R}(\mathrm{sen}(x))\cos x\,d\,x$	$t = \mathrm{sen}x$	$\int \mathcal{R}(t)\,d\,t$
$\int \mathcal{R}(a^x)\,d\,x$	$a^x = t$	$\frac{1}{\lg a}\int \mathcal{R}(t)\frac{1}{t}\,d\,t$
$\int \mathcal{R}(\mathrm{sen}x, \cos x)\,d\,x$	$t = \mathrm{tg}x/2$	$\int \mathcal{R}\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,d\,t$
$\int \mathcal{R}(\mathrm{sen}^2x, \cos^2 x, \mathrm{sen}x\cos x, \mathrm{tg}x)\,d\,x$	$t = \mathrm{tg}x$	$\ldots$

Funzioni razionali con argomento irrazionale. Regola generale
Siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ con $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$ (oppure $\alpha = \gamma = 1$ e $\beta = \delta = 0$).
Siano $m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^*$ con m_i/n_i ridotto ai minimi termini.
Per l'integrale

$$\int \mathcal{R}\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{m_1/n_1}, \ldots, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{m_k/n_k}\right)\,d\,x$$

è opportuna la sostituzione

$$t^\mu = \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right), \quad \mu = m.c.m\{n_1, \ldots, n_k\}.$$

In tabella riportiamo particolari casi della precedente formula

integrale	sostituzione
$\int \mathcal{R}\left(x,\ \sqrt[m]{ax+b}\right)\,d\,x$	$ax + b = t^m$
$\int \mathcal{R}\left(x, x^{m_1/n_1}, \ldots, x^{m_k/n_k}\right)\,d\,x$	$t^\mu = x \quad \mu = m.c.m\{n_1, \ldots, n_k\}$
$\int \mathcal{R}\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,d\,x$	$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$

Notiamo che altre sostituzioni solo altrettanto convenienti. Ad esempio per

$$\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)\, d\,x \qquad \text{si può usare } x = a\text{sen}t$$

Inoltre possiamo trattare casi in cui l'argomento della radice non sia sempre lo stesso. Ad esempio per

$$\int \mathcal{R}(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\, d\,x \text{ usare la sostituzione } \sqrt{ax+b} = t$$

che riporta ad irrazionali di trinomi di secondo grado che ora discutiamo.

integrale $a > 0, \Delta \neq 0$	segno di Δ	sostituzione
$\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, d\,x$	$\Delta \neq 0$	$\sqrt{a}(t-x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$
$\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{-ax^2+bx+c}\right)\, d\,x$	$\Delta > 0,$ radici x_1, x_2	$t = \sqrt{a\frac{x_2-x}{x-x_1}}$

Differenziali Binomi

$$\int x^m \left(ax^p + b\right)^q\, d\,x, \quad m, p, q \in \mathbb{Q}.$$

Tale integrale è razionalizzabile nei seguenti casi ponendo $t = x^p$:

- $q \in \mathbb{Z}$
- $\frac{m+1}{p} \in \mathbb{Z}$
- $\frac{m+1}{p} + q \in \mathbb{Z}$

OSSERVAZIONE Per quanto dettagliate possano essere le tavole degli integrali... la maggiorparte delle funzioni **NON** ammettono una primitiva che abbia una espressione analitica esplicita come quella cercata in queste tavole!