CORSO DI LAUREA IN CHIMICA E TECNOLOGIE FARMACEUTICHE
DOTT.SSA SANDRA LUCENTE[1]

RICHIAMI DI TEORIA DELL'INTEGRAZIONE

Nel seguito si considera $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.
Si definisce *partizione di* $[a, b]$ un insieme di punti $x_0, x_1, \dots, x_n$ tali che $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
L'insieme delle partizione di $[a, b]$ viene denotato con il simbolo $\mathcal{P}([a, b])$. Sia $P \in \mathcal{P}([a, b])$. A ciascun intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ con $x_k, x_{k-1} \in P$, restano associati i valori

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x); \qquad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

Le quantità

$$s(P, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}), \qquad S(P, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

sono chiamate rispettivamente *somma inferiore* e *somma superiore* relative alla funzione f e alla partizione P. Quando è chiaro il contesto, ometteremo il simbolo f in $s(P, f)$ e $S(P, f)$.

Proposizione 1. Siano $P, Q \in \mathcal{P}([a, b])$. Si ha

$$s(P) \leq s(P \cup Q) \leq S(P \cup Q) \leq S(Q).$$

La precedente proposizione ci assicura che gli insiemi $\{s(P)\}_{\mathcal{P}([a,b])}$ e $\{S(P)\}_{\mathcal{P}([a,b])}$ sono insiemi numerici separati. In particolare per l'assioma di completezza esistono

$$\underline{\int_a^b f(x)\, d\, x} := \sup_{\mathcal{P}([a,b])} s(P), \qquad \overline{\int_a^b f(x)\, d\, x} := \inf_{\mathcal{P}([a,b])} S(P)$$

detti rispettivamente *integrale inferiore* e *integrale superiore* di f in $[a, b]$.

Definizione 0.1. Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata si dice *integrabile* se gli insiemi $\{s(P)\}_{\mathcal{P}([a,b])}$ e $\{S(P)\}_{\mathcal{P}([a,b])}$ sono contigui, ovvero se l'integrale inferiore e superiore di f in $[a, b]$ sono coincidenti, in tal caso questo valore comune si chiama *integrale* di f in $[a, b]$ e si denota con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\, d\, x.$$

Teorema 1. Le funzioni continue sono integrabili.
Le funzioni monotone sono integrabili.

Esercizio 1. La funzione di Dirichlet

$$\chi(x) = \begin{matrix} 0 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 & x \in \mathcal{I} \cap [0, 1] \end{matrix}$$

non è integrabile (nè continua in alcun punto). Infatti per ogni partizione di $[0, 1]$ la somma inferiore vale zero e la somma superiore vale 1 quindi gli integrali inferiore e superiore non coincidono.

Teorema 0.1. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata.
La funzione f è integrabile in $[a, b]$ se e solo se per ogni $c \in]a, b[$ le restrizioni di f su $[a, c]$ e $[c, b]$ sono integrabili.
Fissato $c \in [a, b]$, vera una delle precedenti proprietà equivalenti si ha

$$\int_a^b f(x)\, d\, x = \int_a^c f(x)\, d\, x + \int_c^b f(x)\, d\, x. \tag{1}$$

[1]Questi appunti potrebbero contenere sviste ed errori, vi prego di segnalarmeli, ad esempio via email. Versione del 16-12-12

Proof. Discutiamo dapprima il caso di f continua, in tal caso l'equivalenza tra l'integrabilit della funzione e delle sue restrizioni è una banale conseguenza dell'integrabilità delle funzioni continue. Resta da dimostrare la (1).
Si fissi $\epsilon > 0$. Poniamo $f_1 = f_{|_{[a,c]}}$ ed $f_2 = f_{|_{[c,b]}}$ Essendo f_1 integrabile risulta $\int_a^c f(x)\,d\,x = \sup_{\mathcal{P}([a,b])} s(P, f_1)$ quindi per la seconda proprietà dell'estremo superiore, esiste P_1 tale che

$$s(P_1, f_1) > \int_a^c f(x)\,d\,x - \epsilon/2.$$

Analogamente

$$s(P_2, f_2) > \int_c^b f(x)\,d\,x - \epsilon/2.$$

Osservato che $P = P_1 \cup P_2$ è una partizione di $[a, b]$ e che $P_1 \cap P_2 = \{c\}$, per l'integrabilità di f su $[a, b]$ dalla prima proprietà dell'estremo superiore, abbiamo

$$\int_a^b f(x)\,d\,x \geq s(P, f) = s(P_1, f_1) + s(P_2, f_2) > \int_a^c f(x)\,d\,x + \int_c^b f(x)\,d\,x - \epsilon.$$

Essendo ϵ arbitrario, si conclude che

$$\int_a^b f(x)\,d\,x \geq \int_a^c f(x)\,d\,x + \int_c^b f(x)\,d\,x.$$

Viceversa si fissi una arbitraria partizione P di $[a, b]$ e siano $Q = P \cup c$, $P_1 = Q \cap [a, b]$, $P_2 = Q \cap [c, b]$. Utilizzando la Proposizione 1 e l'argomento della prima parte della dimostrazione abbiamo

$$s(f, P) \leq s(f_Q) = s(f_1, P_1) + s(f_2, P_2) \leq \int_a^c f(x)\,d\,x + \int_c^b f(x)\,d\,x.$$

Passando all'estremo superiore di tali somme si ha

$$\int_a^b f(x)\,d\,x \leq \int_a^c f(x)\,d\,x + \int_c^b f(x)\,d\,x.$$

Si omette il caso di funzioni integrabili non continue. □