Corso di laurea in Chimica e Tecnologie Farmaceutiche
Dott.ssa Sandra Lucente[1]

Cenni sulle equazioni differenziali

1. Cosa è una equazione differenziale

Esempio 1.1. Sia $g(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Il teorema fondamentale del calcolo integrale dà informazioni sulla ricerca di una funzione incognita la cui derivata sia la g. Questo problema si riscrive come *l'equazione differenziale*

$$y'(x) = g(x)$$

nell'incognita $y(x)$. Il teorema fondamentale del calcolo integrale ci dice che questa equazione differenziale ammette soluzione, anzi ne ammette infinite che differiscono tra loro di una costante. Possiamo anche chiederci quale tra le primitive di $g(x)$ valga $y_0 \in \mathbb{R}$ nel punto $x_0 \in [a, b]$. Questa seconda questione si riscrive come *problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(x) = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

e sappiamo che ha una unica soluzione

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt.$$

Definizione 1.1. Sia F una funzione di $n + 2$ variabili reali a valori in $\mathbb{R}$. Si chiama *equazione differenziale (ordinaria) di ordine n* l'espressione

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

dove la funzione incognita $y : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione n volte derivabile nel suo dominio e l'uguaglianza precedente è verificata per ogni x nel dominio di y

Definizione 1.2. Sia f una funzione di $n + 1$ variabili reali a valori in $\mathbb{R}$. Si chiama *equazione differenziale (ordinaria) di ordine n in forma normale* l'espressione

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)). \tag{1}$$

Anche in questo caso si richiede che la funzione incognita $y : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia una funzione n volte derivabile nel suo dominio e l'uguaglianza precedente sia verificata per ogni x nel dominio di y
Una soluzione di una equazione differenziale si dice anche *curva integrale* o *integrale particolare* dell'equazione assegnata.

Definizione 1.3. Sia f una funzione di $n + 1$ variabili reali a valori in $\mathbb{R}$. Sia $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1})$ un punto in cui f è definita. Si può considerare il *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)). \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Le relazioni $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ si chiamano *condizioni iniziali.* Dunque si richiede che la funzione incognita $y : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia una funzione n volte derivabile, verifichi l'equazione differenziale ed inoltre in x_0 valga y_0, si assegnano anche i valori in x_0 delle derivate della funzione incognita.

[1]Questi appunti potrebbero contenere sviste ed errori, vi prego di segnalarmeli, ad esempio via email. Versione del 22-12-12

Non è detto che assegnata una equazione differenziale essa sia risolubile, nè che la soluzione di un problema di Cauchy sia unica, nè se il dominio della soluzione è limitato o no. La risposta a queste domande dipende dalla struttura delle funzioni assegnate F o f usate per descrivere l'equazione differenziale.
Tratteremo solo alcuni modelli di equazioni differenziali e per ciascun modello ci interrogheremo sull'esistenza di soluzioni, sul loro dominio, sulla struttura dell'insieme delle soluzioni e sull'unicità del problema di Cauchy associato.
Nelle scienze applicate molti problemi si riformulano come equazioni differenziali.

Esempio 1.2. **Caduta di un grave senza attrito.**
Consideriamo un corpo di massa m che cade verso il basso a causa della gravità, lungo una retta verticale che orientiamo col verso positivo in alto. Indichiamo con $x(t)$ la sua altezza rispetto al suolo al tempo t. Se g denota laccelerazione di gravità, la forza che agisce sul corpo, trascurando lattrito dellaria, è pari a $-mg$ (il segno meno indica che la forza è diretta verso il basso). Per la seconda legge della dinamica classica tale forza coincide con l'accelerazione del corpo moltiplicata per la sua massa ovvero $mx''(t) = -mg$. Il problema si è ricondotto allo studio della equazione differenziale

$$x''(t) = -g \tag{2}$$

che integrata dà

$$x^{'}(t) = -gt + A$$

con A costante arbitraria. Integrando ulteriormente abbiamo

$$x(t) = -g\frac{t^2}{2} + AT + B$$

con A, B costanti arbitrarie. Questa rappresenta quindi la soluzione generale dell'equazione differenziale (2).
Supponiamo ora di voler conoscere in quanto tempo un corpo inizialmente fermo che cade da un'altezza h arriva al suolo. In tal caso dobbiamo risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) = -g \\ x(0) = h \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

determinando $B = h$ ed $A = 0$.

Esempio 1.3. **Dinamica delle popolazioni. (Modello di Malthus, 1798)** Si considera una popolazione che evolve isolata, e le cui uniche cause di variazione sono le nascite e le morti. Indichiamo con

- $N(t)$ il numero di individui presenti al tempo t,
- λ il tasso di natalità,
- μ il tasso di mortalità,

e supponiamo che $\epsilon = \lambda - \mu$ il tasso di crescita sia indipendente dal tempo. Allora l'incremento della popolazione, nel tempo h è descritto da

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = \epsilon N(t).$$

Passando al limite per $h \to 0$, si ha $N'(t) = \epsilon N(t)$.
Questa equazione differenziale del primo ordine, ha soluzione $N(t) = N(0)e^{\epsilon t}$, ovvero la popolazione aumenta in maniera esponenziale se il tasso di crescita è positivo, tende ad estinguersi se il tasso di crescita è negativo.

Esempio 1.4. **Dinamica delle popolazioni (Modello di Verhulst, 1845).** Il modello di Malthus è irrealistico, in quanto non considera che, se aumenta la popolazione, aumenta la competizione per accaparrarsi le risorse. In particolare prevede un'aumento esponenziale della popolazione che non tiene conto della capacità dell'ambiente. Un modello più realistico ipotizza che il tasso di crescita decresca con N. Indichiamo con

- $N(t)$ il numero di individui presenti al tempo t,

- λ il tasso di natalità,
- μ il tasso di mortalità,
- $\epsilon = \lambda - \mu$ il tasso di crescita
- k la capacità dell'ambiente.

Allora si ha
$$N'(t) = \epsilon N(t) - \frac{\epsilon}{k} N^2(t).$$
Vedremo come si risolve tale equazione nel Paragrafo 4.

Esempio 1.5. **Decadimento radioattivo** In un materiale radioattivo, gli atomi emettono particelle subendo un processo di decadimento. Se $x(t)$ indica il numero di atomi che al tempo t non sono ancora decaduti, lequazione differenziale che governa questo processo è del tutto analoga all'equazione del modello di Malthus della dinamica delle popolazioni:
$$x'(t) = -\lambda x(t)$$
dove $\lambda > 0$ è la costante di decadimento, ed è caratteristica del materiale. Sarà di nuovo la funzione esponenziale a governare questo fenomeno.

Esempio 1.6. **Oscillatore armonico** Una massa m è attaccata all'estremità di una molla, mentre l'altra estremità della molla è fissa. Allungando o accorciando la molla, la massa m si può spostare lungo una retta. Indichiamo con $x(t)$ la posizione della massa al tempo t, in modo che l'origine $x = 0$ indichi la posizione di equilibrio in cui la molla ha la sua lunghezza naturale. Quando la molla è allungata o accorciata, essa esercita sulla massa una forza di richiamo $F = -\omega x(t)$, dove $\omega > 0$ è la costante di elasticità della molla (il segno negativo indica che la forza è diretta verso la posizione di equilibrio). Applicando la seconda legge della dinamica classica avremo l'equazione differenziale che governa tale fenomeno:
$$mx''(t) = -\omega x(t). \tag{3}$$
Se poi il moto della massa è smorzato da una forza di attrito, l'equazione diventa
$$mx''(t) = -\omega x(t) - \mu x'(t)$$
dove μ è il coefficiente di attrito. Infine, se si esercita sulla massa una forza esterna $f(t)$, si ottiene lequazione generale delloscillatore smorzato e forzato
$$mx''(t) = -\omega x(t) - \mu x'(t) + f(t).$$
Il fenomeno è dunque descritto da equazioni differenziali del secondo ordine. In più queste equazioni sono lineari secondo la prossima definizione e avremo una tecnica per descrivere l'insieme delle soluzioni. Sin d'ora però si osserva che queste equazioni coinvolgeranno le funzioni sen e cos infatti se si prende $m = 1 = \omega$ e $\mu = 0 = f$ si stanno cercando funzioni la cui derivata seconda sia l'opposto della funzione stessa. Tali funzioni sono appunto $x(t) = \mathrm{sen} t$ e $x(t) = \cos(t)$. Vedremo in più che tutte le soluzioni di (3) sono descritte da
$$x(t) = C_1 \mathrm{sen}(\sqrt{\omega/m}t) + C_2 \cos(\sqrt{\omega/m}t).$$

1.1. **Equazioni differenziali lineari.** Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. *Una equazione differenziale lineare di ordine n* è una equazione differenziale ordinaria che si presenta nella forma
$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = \varphi(x). \tag{4}$$
Le funzioni $a_i : I \to \mathbb{R}$, per $i = 0, \ldots, n-1$, sono detti *coefficienti dell'equazione;* la funzione φ è anch'essa definita sullo stesso intervallo I.
Nel caso in cui le funzioni a_i sono costanti allora si parlerà di equazioni differenziali lineari *a coefficienti costanti,* inoltre se la funzione φ è identicamente nulla diremo che l'equazione omogenea.
Se invece la funzione f nella (1) non si riconduce alla forma (4) l'equazione si dirà *nonlineare.*
La linearità dell'equazione comporta il seguente evidente risultato.

Proposizione 1.

- *La somma di due soluzioni di una equazione lineare omogenea è ancora una soluzione dell'equazione lineare omogenea;*

- *Il prodotto di una soluzione di una equazione lineare omogenea per uno scalare è ncora una soluzione dell'equazione lineare omogenea.*

Per queste equazioni si può caratterizzare *l'integrale generale* della (4) cioè l'insieme di tutte le sue possibili soluzioni.

Definizione 1.4. Siano $f_1(x); f_2(x); \dots ; f_n(x)$ funzioni a valori reali definite su un intervallo I. Tali funzioni si dicono linearmente indipendenti se e solo se non è possibile esprimere una qualsiasi di loro come combinazione lineare delle rimanenti ovvero se vale la seguente

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \quad \forall x \in I \iff c_1 = c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

Enunciamo senza dimostrare i seguenti teoremi che caratterizzano la struttura dell'integrale generale delle equazioni differenziali omogenee.

Teorema 1. *L'equazione differenziale a coefficienti continui in I*

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \tag{5}$$

ammette n soluzioni linearmente indipendenti $y_1(x); y_2(x); \dots ; y_n(x)$.
Inoltre l'integrale generale della (5) *è dato da*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

al variare di $c_1, c_2, \dots , c_n \in \mathbb{R}$.

Teorema 2. *Si consideri l'equazione differenziale a coefficienti e termine noto continui in I*

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = \varphi(x). \tag{6}$$

Noti n soluzioni linearmente indipendenti $y_1(x); y_2(x); \dots ; y_n(x)$ per l'equazione omogenea associata e nota $\bar{y}(x)$ una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea, l'integrale generale della (6) *è dato da*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + \bar{y}(x)$$

al variare di $c_1, c_2, \dots , c_n \in \mathbb{R}$.

2. Equazioni differenziali a variabili separabili

Notazione. Nel seguito si scrive $\int g(x)\, d\, x$ per denotare una primitiva di una funzione assegnata $g(x)$.
Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalli. Sia f continua su I e g continua su J. Si considera l'equazione

$$y'(x) = f(x)g(y(x)).$$

Tale equazione è lineare solo nel caso $g(y) = y$ oppure g costante.

Teorema 3.

- *Se esiste $y_0 \in J$ tale che $g(y_0) = 0$, allora la funzione costante $y(x) = y_0$ è soluzione particolare della $y'(x) = f(x)g(y(x))$.*
- *Se g non si annulla in $J' \subset J$ allora l'insieme delle soluzioni della equazione è descritto dalla relazione*

$$\int \frac{1}{g(y)}\, d\, y = \int f(x)\, d\, x + C$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.

Il precedente teorema non ci dà informazioni sulle soluzioni del problema di Cauchy che potrebbero non essere uniche o non essere definite nell'intervallo in cui è definita la f. Questi fenomeni non si avranno per equazioni differenziali lineari.
Si ha il seguente esempio di *non unicità*.

Esempio 2.1. Si consideri

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{5}{4}(y(x))^{1/5} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Questo problema di Cauchy ha infinite soluzioni.
Una è $y(x) = 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Dalla tecnica descritta abbiamo le soluzioni $y(x) = \pm x^{5/4}$ in $[0, +\infty)$ da cui possiamo derivare le soluzioni

$$y(x) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \pm x^{5/4} & t \geq 0 \end{cases}$$

ma anche

$$y(x) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \pm(x-a)^{5/4} & t \geq a \end{cases}$$

con $a > 0$.

Osserviamo infine che il dominio delle soluzioni non è l'intero dominio della funzione f, come risulta dal seguente esempio. Anche questo fenomeno (detto esplosione della soluzione, se questa ha un asintoto verticale) è tipico delle equazioni nonlineari.

Esempio 2.2. Si consideri

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-y(x)}}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

L'intervallo in cui ha senso il problema è $\mathbb{R}^*_+$. La soluzione del problema è $y(x) = \ln(\ln(t + e))$ definita in $(\mathrm{e}^{-eu}, +\infty)$ e diverge per $x \to \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$.

3. Equazioni differenziali lineari del I ordine

Una equazione differenziali lineari del I ordine ha la seguente struttura:

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

essendo $a(x), b(x)$ continue su un intervallo I. Se $b = 0$ l'equazione si dice *omogenea.*

Teorema 4. **Integrale generale delle equazioni differenziali lineari omogenee del I ordine.** *L'insieme delle soluzioni dell'equazione*

$$y'(x) = a(x)y(x) \tag{7}$$

è descritto da

$$y(x) = C\mathrm{e}^{\int a(t)\,dt} \tag{8}$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Derivando la (8) si ottiene subito che le funzioni di siffatta forma sono soluzioni di (7).
Viceversa sia $y(x)$ una soluzione di (7), moltiplicando questa equazione per $\mathrm{e}^{-\int a(t)\,dt}$ otteniamo

$$\frac{\partial}{dx}\{-\mathrm{e}^{\int a(t)\,dt}y(x)\} = 0.$$

Essendo le funzioni defnite su intervalli, un corollario del teorema di Lagrange assicura che esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che $-\mathrm{e}^{\int a(t)\,dt}y(x) = C$, ovvero y appartiene all'insieme descritto in (8). □

Teorema 5. **Integrale particolare delle equazioni differenziali lineari non-omogenee del I ordine.** *Un integrale particolare dell'equazione*

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x).$$

è dato da

$$\bar{y} = \mathrm{e}^{\int a(s)\,ds} \int b(t)\mathrm{e}^{-\int a(s)\,ds}\,dt. \tag{9}$$

Dimostrazione. Basta derivare la (9). □

Osservazione 3.1. La struttura della soluzione particolare trovata è del tipo $\bar{y} = y_o(x)\omega(x)$ essendo $y_o(x)$ un integrale particolare dell'equazione omogenea.

Teorema 6. **Integrale generale delle equazioni differenziali lineari non-omogenee del I ordine.** *Sia $\bar{y}(x)$ una soluzione particolare dell'equazione*

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x).$$

L'integrale generale di tale equazione è descritto da

$$y(x) = C\mathrm{e}^{\int a(t)\,dt} + \bar{y}(x)$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Essendo $\mathrm{e}^{\int a(t)\,dt}$ integrale particolare dell'equazione omogenea e $\bar{y}$ integrale particoalre dell'equazione non omogenea si vede subito che $y(x) = C\mathrm{e}^{\int a(t)\,dt} + \bar{y}(x)$ è soluzione dell'equazione non omogenea.
Viceversa mostriamo che se $z(x)$ è una soluzione dell'equazione non omogenea allora esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $z(x) = C\mathrm{e}^{\int a(t)\,dt} + \bar{y}(x)$. Osserviamo che $z(x) - \bar{y}(x)$ è soluzione dell'equazione omogenea, quindi la tesi segue dal Teorema 4 ∎

Teorema 7. **Teorema di esistenza e unicità per equazioni differenziali lineari del I ordine** *Siano $a, b : I \to \mathbb{R}$ continue. Esiste una ed un'unica soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{10}$$

data da

$$y(x) = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{t} a(s)\,ds}\,dt \right). \tag{11}$$

Dimostrazione. Sappiamo che (11) è soluzione dell'equazione non-omogenea ed è banale mostrare che verifica la condizione iniziale.
Proviamo che tale soluzione è unica. Se infatti ne esistesse un'altra allora la differenza delle due soluzioni sarebbe soluzione dell'equazione omogenea con dato nullo. Resta da dimostrare che l'unica soluzione di una equazione omogenea che si annulla in un punto la soluzione nulla. Questo è ovvia conseguenza del fatto che tutte le soluzioni non nulle dell'equazioni omogenee sono esponenziali. ∎

4. Equazioni di Bernoulli

Si tratta di una equazione del I ordine, che può essere anche nonlineare: assegnati $a(x), b(x) : I \to \mathbb{R}$ continue, si studia l'equazione differenziale

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^{\alpha}(x) \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Per $\alpha = 0, 1$ si ha una equazione lineare del I ordine, in particolare omogenea per $\alpha = 1$.
Per $\alpha > 0$ un integrale particolare è dato da $y(x) = 0$.
Per $\alpha \neq 0, 1$ si osserva che la funzione

$$z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$$

è soluzione dell'equazione lineare

$$z'(x) = (1-\alpha)a(x)z(x) + (1-\alpha)b(x).$$

Si ricava

$$z(x) = \mathrm{e}^{(1-\alpha)\int a(s)\,ds} \left(C + (1-\alpha) \int b(t)\mathrm{e}^{-(1-\alpha)\int a(s)\,ds}\,dt \right).$$

e quindi

$$y(x) = (z(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

facendo attenzione agli intervalli in cui y risulta definita se $\frac{1}{1-\alpha}$ è naturale o intero relativo, razionale con denominatore pari o dispari o reale non razionale.

5. Equazioni differenziali lineari del II ordine a coefficienti costanti

Una equazione differenziale del secondo ordine a coeffficienti costanti è del tipo

$$ay'' + by' + cy = \varphi(x) \quad a \neq 0.$$

La relativa equazione omogenea è

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{12}$$

A tale equazione associamo l'equazione caratteristica

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{13}$$

avente discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.
Nel caso $\Delta > 0$ denotiamo le radici dell'equazione caratteristica con λ_1, λ_2.
Nel caso $\Delta > 0$ denotiamo la radice dell'equazione caratteristica con λ.
Nel caso $\Delta < 0$ poniamo $\alpha = \frac{-b}{2a}$ e $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Teorema 8. **Integrali linearmente indipendenti dell'equazione differenziale del secondo ordine a coeffficienti costanti omogenea.**

- *Se* $\Delta > 0$ *allora* $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ *sono soluzioni linearmente indipendenti di* (12).
- *Se* $\Delta = 0$ *allora* $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y_2(x) = x\mathrm{e}^{\lambda x}$ *sono soluzioni linearmente indipendenti di* (12).
- *Se* $\Delta < 0$ *allora* $y_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$ *e* $y_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x)$ *sono soluzioni linearmente indipendenti di* (12).

Dimostrazione. Sia $\Delta > 0$. Proviamo che $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ sono soluzioni di (12). Osserviamo che $y_i' = \lambda_i y_i$ e $y_1'' = \lambda_i^2 y_i$, con $i = 1, 2$. Quindi

$$a{y_i}'' + by_i' + cy_i = y_i(a\lambda_i^2 + b\lambda_i + c) = 0$$

ovvero y_i verifica l'equazione differenziale omogenea. Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che λ_i è radice dell'equazione caratteristica.
Proviamo ora che y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti. Se infatti c_1, c_2 sono costanti tali che

$$c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x} = 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per $x = 0$ questa relazione dà $c_2 = -c_1$ e quindi

$$c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}(1 - \mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)x}) = 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per $x = \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)}$) otteniamo $c_1 = 0$ e quindi $c_2 = 0$.

Sia $\Delta = 0$. La dimostrazione del fatto che $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ è soluzione della (12) è analoga al caso precedente. Riguardo a $y_2(x) = x\mathrm{e}^{\lambda x}$ osserviamo che $y_2'(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda x\mathrm{e}^{\lambda x}$ e $y_2''(x) = 2\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda^2 x\mathrm{e}^{\lambda x}$ quindi

$$a{y_2}'' + by_2' + cy_2 = \mathrm{e}^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c)x + \mathrm{e}^{\lambda x}(a2\lambda + b) = 0.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che λ è soluzione dell'equazione caratteristica ed essendo $\Delta = 0$ risulta $\lambda = -\frac{b}{2a}$.
Proviamo ora che y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti. Se infatti c_1, c_2 sono costanti tali che

$$c_1\mathrm{e}^{\lambda x} + c_2 x\mathrm{e}^{\lambda x} = 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per $x = 0$ questa relazione dà $c_1 = 0$ e quindi

$$c_2 x\mathrm{e}^{\lambda x} = 0$$

che per $x = 1$ dà $c_2 = 0$.

Sia $\Delta < 0$ e siano $y_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $y_2(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x)$. Dimostriamo che y_1 è soluzione di $ay'' + by' + c = 0$; analogamente si procede per y_2. Risulta

$$y_1'(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha\cos(\beta x) - \beta\mathrm{sen}(\beta x))$$
$$y_1''(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha^2\cos(\beta x) - 2\alpha\beta\mathrm{sen}(\beta x) - \beta^2\cos(\beta x))$$

Quindi

$$\begin{aligned} ay'' + by' + c &= \mathrm{e}^{\alpha x}(a\alpha^2\cos(\beta x) - 2a\alpha\beta\mathrm{sen}(\beta x) - a\beta^2\cos(\beta x) + b\alpha\cos(\beta x) - b\beta\mathrm{sen}(\beta x) + c\cos(\beta x)) \\ &= \mathrm{e}^{\alpha x}(a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c)\cos(\beta x) - \mathrm{e}^{\alpha x}(2a\alpha\beta + b\beta)\mathrm{sen}(\beta x) \end{aligned}$$

Essendo $\alpha = \frac{-b}{2a}$ il secondo addendo è evidentemente nullo. Ma lo è anche il primo addendo poichè

$$a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c = a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{-\Delta}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 + \Delta - 2b^2 + 4ac}{4a} = 0.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'espressione esplicita di Δ.
Proviamo ora che y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti. Se infatti c_1, c_2 sono costanti tali che

$$c_1\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x) = 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per $x = 0$ si ha $c_1 = 0$, per $x = \pi/2$ si ha $c_2 = 0$. $\square$

Lo strumento fondamentale per ottenenere teremi di unicità è la seguente proposizione nota come *Lemma di Gronwall.*

Proposizione 2. Sia $\eta(t)$ una funzione positiva e continua sull'intervallo $[0, T]$. Siano φ, ψ funzioni positive contine. Si supponga che, per quasi ogni $t \in [0, T]$, risulta

$$\eta'(t) \leq \varphi(t)\eta(t) + \psi(t). \tag{14}$$

Allora per ogni $0 < t < T$ si ha

$$\eta(t) \leq \mathrm{e}^{\int_0^t \varphi(s)\,d\,s}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,d\,s\right]$$

In particolare se $\eta'(t) \leq \varphi(t)\eta(t)$ e $\eta(0) = 0$ allora $\eta(t) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$.

Dimostrazione. Usando l'ipotesi (14) abbiamo

$$\frac{d}{dt}\left(\eta(t)\mathrm{e}^{-\int_0^t \varphi(s)\,d\,s}\right) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \varphi(s)\,d\,s}(\eta'(t) - \varphi(t)\eta(t)) \leq \mathrm{e}^{-\int_0^t \varphi(s)\,d\,s}\psi(t).$$

Integrando otteniamo

$$\eta(t)\mathrm{e}^{-\int_0^t \varphi(s)\,d\,s} - \eta(0) \leq \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^r \varphi(s)\,d\,s}\psi(r)\,d\,r$$

Essendo $\varphi \geq 0$ si ha $\mathrm{e}^{-\int_0^r \varphi(s)\,d\,s} \leq 1$ e si conclude

$$\eta(t)\mathrm{e}^{-\int_0^t \varphi(s)\,d\,s} \leq \eta(0) + \int_0^t \psi(r)\,d\,r.$$

da cui la tesi. $\square$

Teorema 9. **Teorema di unicità per l'equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficenti costanti.** *Il problema di Cauchy lineare omogenea del secondo ordine a coefficenti costanti con dati nulli*

$$\begin{cases} ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

ammette solo la soluzione nulla.

Dimostrazione. Dividendo per a possiamo ricondurci al caso $y''(x)+by'(x)+cy(x)=0$. Posto $z(x)=y'(x)$ abbiamo le seguenti relazioni

$$\begin{cases} z'=-bz-cy \\ y'=z \\ z(x_0)=0 \\ y(x_0)=0 \end{cases}$$

Consideriamo $\eta=z^2+y^2$. Si ha

$$(z^2+y^2)'=2z(z'+y)=2z(-bz+(1-c)y)=-2bz^2+2(1-c)zy.$$

Ricordiamo che per ogni a,b risulta $ab\le a^2+b^2$ quindi

$$(z^2+y^2)'\le 2|b|z^2+2|1-c|z^2+2|1-c|y^2\le(2|b|+2|1-c|)(z^2+y^2).$$

Inoltre $\eta(0)=z^2(0)+y^2(0)=0$. Per il lemma di Gronwall con $\varphi=(2|b|+2|1-c|)$ risulta $z^2+cy^2=0$ da cui $y=0$. $\square$

Come conseguenza del Teorema 1 abbiamo il seguente risultato. Non avendo dimostrato il Teorema 1, dimostriamo il successivo utilizzando il precedente teorema di unicità

Teorema 10. **Integrale generale dell'equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficenti costanti.** *Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale* (12) *lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti sono espresse dalla famiglia di funzioni definite su* $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{lll} c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x} & \textit{se} & \Delta>0 \\ c_1\mathrm{e}^{\lambda x}+c_2x\mathrm{e}^{\lambda x} & \textit{se} & \Delta=0 \\ c_1\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)+c_2\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x) & \textit{se} & \Delta<0 \end{array}$$

al variare delle costanti c_1,c_2 *dove le quantità* $\Delta,\lambda_1,\lambda_2,\alpha,\beta$ *sono associate nella maniera descritta all'equazione caratteristica.*

Dimostrazione. La dimostrazione sarà conseguenza del teorema di unicità dell'equazione omogenea. Fissiamo $x_0\in\mathbb{R}$. Sappiamo che $c_1y_1+c_2y_2$ è soluzione dell'equazione omogenea. Se $u(x)$ è una ulteriore soluzione, risulta soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0 \\ y(x_0)=u(x_0) \\ y'(x_0)=u'(x_0) \end{cases}$$

Ma per opportuni c_1 c_2 anche $c_1y_1+c_2y_2$ è soluzione dello stesso problema quindi la differenza delle due funzioni è soluzione dell'equazione omogenea con dati nulli, ovvero è la soluzione nulla. In definitiva le due soluzioni coincidono, ovvero esistono opportuni c_1 e c_2 tali che $u=c_1y_1+c_2y_2$. Data la genericità di u questo ci dice che ogni soluzione dell'equazione omogenea è combinazione lineare di y_1 e y_2. $\square$

Come conseguenza del Teorema 4 e del risultato precedente possiamo determinare l'integrale generale dell'equazione non-omogenea non appena si determina una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea, qui denotata con $\bar{y}$. In definitiva, l'integrale generale di

$$ay''+by'+cy=\varphi(x)\quad a\neq 0.$$

avrà la seguente struttura

$$\begin{array}{lll} c_1eu^{\lambda_1 x}+c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}+\bar{y} & \text{se} & \Delta>0 \\ c_1eu^{\lambda x}+c_2x\mathrm{e}^{\lambda x}+\bar{y} & \text{se} & \Delta=0 \\ c_1eu^{\alpha x}\cos(\beta x)+c_2\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x)+\bar{y} & \text{se} & \Delta<0 \end{array} \tag{15}$$

In particolare assegnati $y_0,y_1\in\mathbb{R}$, il problema di Cauchy associato ad una equazione differenziale lineare del II ordine

$$\begin{cases} ay''(x)+by'(x)+cy(x)=\varphi(x) \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_1 \end{cases}$$

ammetterà sempre un'unica soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$ ottenuta imponendo le condizioni iniziali in (15)

Resta da descrivere un metodo per determinare una soluzione particolare $\bar{y}$ dell'equazione differenziale non-omogenea. Tale metodo, dovuto a Lagrange, dicesi *metodo della variazione delle costanti.* Come nel caso delle equazioni del primo ordine, Osservazione 3.1, si vuole trovare una soluzione dell'equazione non-omogenea partendo dall'integrale generale del non-omogenea; ovvero si cerca una soluzione di $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \varphi(x)$ che sia della forma

$$\bar{y}(x) = \omega_1(x)y_1(x) + \omega_2(x)y_2(x)$$

essendo y_1, y_2 gli integrali linearmente dipendenti della omogenea dati dal Teorema 8.
Richiamo. Richiamiamo i seguenti risultati sui sistemi lineari 2×2. Assegnata una tabella di due righe per due colonne (detta *matrice)* si associa a tale tabella il suo *determinante* secondo la formula

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Considerato un sistema lineare di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = e \\ cx_1 + dx_2 = f \end{cases}$$

si dimostra che se $ad - bc \neq 0$ allora le soluzioni del sistema sono date da

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Tale risoluzione è nota come *metodo di Cramer.*

Definizione 5.1. Assegnate due funzioni derivabili y_1, y_2, si considera il *determinante Wronskiano* di y_1, y_2:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'.$$

Osserviamo che è non nullo il Wronskiano delle coppie di integrali linearmente indipendenti dell'equazione omogenea descritti nel Teorema thm.IIomo. Infatti se $\Delta > 0$ si ha

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_1 x}e^{\lambda_2 x} \neq 0;$$

se $\Delta = 0$ risulta

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} \neq 0$$

se $\Delta < 0$ allora

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x} \neq 0.$$

Concludiamo con il seguente teorema.

Teorema 11. **Integrale particolare di una equazione lineare del II ordine non omogenea a coefficienti costanti.** *Siano y_1 e y_2 integrali linearmente indipendenti dell'equazione lineare del II ordine omogenea a coefficienti costanti $ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0$. Una soluzione particolare di $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \varphi(x)$ è data da*

$$\bar{y}(x) = \omega_1(x)y_1(x) + \omega_2(x)y_2(x)$$

Dove le funzioni ω_1 e ω_2 verificano il sistema

$$\begin{cases} w_1'(x)y_1(x) + w_2'(x)y_2(x) = 0 \\ w_1'(x)y_1'(x) + w_2'(x)y_2'(x) = \varphi(x)/a \end{cases} \tag{16}$$

quindi

$$w_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \varphi(x)/a & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)} \quad w_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \varphi(x)/a \end{vmatrix}}{W(x)}.$$

Dimostrazione. Siano ω_1 e ω_2 tali che (16) sia soddisfatto. Scelta $\bar{y}(x) = \omega_1(x)y_1(x) + \omega_2(x)y_2(x)$, usando la prima condizione del sistema abbiamo

$$\bar{y}' = \omega_1' y_1(x) + \omega_1 y_1' + \omega_2' y_2 + \omega_2 y_2' = \omega_1 y_1' + \omega_2 y_2'$$

e quindi usando la seconda equazione del sistema risulta

$$\bar{y}'' = \omega_1' y_1'(x) + \omega_1 y_1'' + \omega_2' y_2' + \omega_2 y_2'' = \frac{\varphi}{a} + \omega_1 y_1'' + \omega_2 y_2''.$$

Da cui

$$\begin{aligned} a\bar{y}'' + b\bar{y}' + c\bar{y} &= \varphi + a(\omega_1 y_1'' + \omega_2 y_2'') + b(\omega_1 y_1' + \omega_2 y_2') + c(\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2) \\ &= \varphi + \omega_1(a y_1'' + b y_1' + c y_1) + \omega_2(a y_2'' + b y_2' + c y_2) = \varphi. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'ipotesi che y_1 e y_2 sono integrali dell'equazione lineare del II ordine omogenea. La loro lineare indipendenza serve per avere Wronskiano non nullo e utilizzare il metodo di Cramer nel calcolo di ω_1' e ω_2'. □

In definitiva per risolvere un problema di Cauchy lineare del II ordine non-omogeneo bisogna

(1) Trovare gli integrali linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata;
(2) Calcolare il Wronskiano di tali integrali;
(3) Con il metodo di Cramer determinare $w_1'(x), w_2'(x)$;
(4) Integrando determinare $w_1(x), w_2(x)$ e quindi si trova la soluzione particolare dell'equazione non-omogenea;
(5) Scrivere l'integrale generale dell'equazione non-omogenea;
(6) Assegnando i valori iniziali, si trova la soluzione cercata.