Corso di laurea in Matematica Corso di Analisi Matematica 1-2
Dott.ssa Sandra Lucente [1]

Funzioni potenza ed esponenziale.

Teorema 1. **Teorema di esistenza della radice n-esima.** Sia $n \in \mathbb{N}^*$. Per ogni $a \in \mathbb{R}_+$ esiste uno ed un solo $b \in \mathbb{R}_+$ tale che $b^n = a$.

Corollario 1. Se n è dispari, per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste uno ed un solo $b \in \mathbb{R}$ tale che $b^n = a$.

Definizione 1. Si chiama *radice n-esima di a* il valore b dato dal teorema se $a \geq 0$ e dal corollario se n è dispari e $a < 0$.

Lemma 1. Sia $n \in N^*$. Risulta $(-1)^n = 1$ se n è pari, $(-1)^n = -1$ se n è dispari.

Teorema 2. **Funzione potenza ennesima.** Sia assegnato $n \in \mathbb{N}^*$. La funzione potenza n-esima $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = x^n$ gode delle seguenti proprietà

(1) Il dominio di $f_n(x) = x^n$ è $\mathbb{R}$.
(2) Se n è pari, $f_n(x) = x^n$ è pari.
Se n è dispari $f_n(x) = x^n$ è dispari.
(3) La funzione $f_n(x) = x^n$ si annulla in $x = 0$.
(4) Se n è pari, $f_n(x) = x^n$ è strettamente positiva in $\mathbb{R}^*$.
Se n è dispari $f_n(x) = x^n$ è strettamente positiva in $\mathbb{R}^*_+$, strettamente negativa in $\mathbb{R}^*_-$.
(5) Se n è pari, $f_n(x) = x^n$ è strettamente decrescente in $\mathbb{R}_-$, strettamente crescente in $\mathbb{R}_+$.
Se n è dispari $f_n(x) = x^n$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.
(6) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $f_n([0, +\infty)) = [0, +\infty)$.
Se n è pari $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.
Se n è pari $f_n([-\infty, 0)) = [0, +\infty)$.
Se n è dispari $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Se n è dispari $f_n([-\infty, 0)) = [-\infty, 0)$.
(7) Se n è pari f_n ha un unico minimo nullo in $x = 0$ e non è limitata superiormente
Se n è dispari f_n non è limitata nè inferiormente nè superiormente.

Esercizio fondamentale 1. Saper disegnare i grafici di f_n al variare di n sullo stesso riferimento cartesiano.

Teorema 3. **Funzione radice ennesima.** Sia assegnato $n \in \mathbb{N}^*$. La funzione inversa della potenza n-esima si denota con $f_{1/n}$ e il suo valore in a coincide con la radice n-esima di a.

(1) Se n è pari, il dominio di $f_{1/n}$ è $\mathbb{R}_+$.
Se n è dispari, il dominio di $f_{1/n}$ è $\mathbb{R}$.
(2) Se n è dispari $f_{1/n}$ è dispari.
(3) La funzione $f_{1/n}$ si annulla in $x = 0$.
(4) Se n è pari, $f_{1/n}$ è strettamente positiva
Se n è dispari $f_{1/n}$ è strettamente positiva in $\mathbb{R}^*_+$, strettamente negativa in $\mathbb{R}^*_-$.
(5) $f_{1/n}$ è strettamente crescente nel suo dominio.
(6) Se n è pari $f_{1/n}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.
Se n è dispari $f_{1/n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
(7) Se n è pari $f_{1/n}$ ha un unico minimo nullo in $x = 0$ e non è limitata superiormente
Se n è dispari $f_{1/n}$ non è limitata nè inferiormente nè superiormente.

[1]Questi appunti potrebbero contenere sviste ed errori, vi prego di segnalarmeli, ad esempio via email. Versione del 4-11-10

(8) Per ogni $x, y \in \mathrm{Dom}(f_{1/n})$, ed $n \in \mathbb{N}^*$ risulta

$$\begin{aligned}
&\sqrt[n]{1} = 1\\
&\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}\\
&\sqrt[n]{x^k} = (\sqrt[n]{x})^k\\
&\sqrt[n]{\sqrt[k]{x}} = \sqrt[nk]{x}\\
&\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & n \text{ pari} \\ x & n \text{ dispari} \end{cases}
\end{aligned}$$

Esercizio fondamentale 2. Saper disegnare i grafici di $f_{1/n}$ al variare di n sullo stesso riferimento cartesiano.

Teorema 4. **Funzione reciproca della funzione potenza ennesima.** Sia assegnato $n \in \mathbb{N}^*$. Si considera la funzione potenza $f_{-n} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $f_{-n}(x) = x^{-n} := \frac{1}{x^n}$. Essa gode delle seguenti proprietà

(1) Il dominio di $f_{-n}(x) = \frac{1}{x^n}$ è $\mathbb{R}^*$.
(2) Se n è pari, $f_{-n}(x) = \frac{1}{x^n}$ è pari.
Se n è dispari $f_{-n}(x) = \frac{1}{x^n}$ è dispari.
(3) Se n è pari, $f_{-n}(x) = \frac{1}{x^n}$ è strettamente positiva in $\mathbb{R}^*$.
Se n è dispari $f_{-n}(x) = \frac{1}{x^n}$ è strettamente positiva in $\mathbb{R}^*_+$, strettamente negativa in $\mathbb{R}^*_-$.
(4) Se n è pari, $f_{-n}(x) = \frac{1}{x^n}$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}^*_-$, strettamente decrescente in $\mathbb{R}^*_+$.
Se n è dispari $f_{-n}(x) = \frac{1}{x^n}$ è strettamente decrescente sulle semirette $\mathbb{R}^*_-$ ed $\mathbb{R}^*_+$.
(5) Se n è pari, $f_{-n}(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*_+$. In particolare la funzione è limitata inferiormente, ha inf nullo ma non ha minimo, non è limitata superiormente
Se n è dispari $f_{-n}(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$, quindi non è limitata nè inferiormente nè superiormente.

Esercizio fondamentale 3. Saper disegnare i grafici di f_{-n} al variare di n sullo stesso riferimento cartesiano.

Proposizione 1.
Siano $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^*$, $d_1, d_2 \in \mathbb{N}^*$ tali che $\frac{n_1}{d_1} = \frac{n_2}{d_2}$. Per ogni $x \geq 0$ risulta

$$f_{\frac{1}{d_1}} \circ f_{n_1}(x) = f_{\frac{1}{d_2}} \circ f_{n_2}(x).$$

Proposizione 2. **Proprietà delle potenze ad esponente razionale.** Sia $a \geq 0$, si ha
$a^0 = 1$, $a^1 = a$
$a^{-q} = \frac{1}{a^q}$, per ogni $p \in \mathbb{Q}$
$a^q a^p = a^{q+p}$, per ogni $p, q \in \mathbb{Q}$
$(a^q)^p = a^{pq}$, per ogni $p, q \in \mathbb{Q}$
$a^p b^p = (ab)^p$, per ogni $p \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{R}^*_+$.

Problema Come definire la potenza ad esponente reale? Quale sarà il suo dominio?

Proposizione 3. Sia assegnato $a \in \mathbb{R}_+^*$. Si considera la funzione

$$f_{a,\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \text{ tale che per ogni } q \in \mathbb{Q}, q = \frac{n}{d} \text{ risulta } f_a(q) = a^q := \sqrt[d]{a^n}.$$

Per la Proposizione 1 tale definizione è ben posta perchè non dipende dalla rappresentazione di q come frazione. Per $a = 1$ si tratta della funzione costante di valore 1 ristretta a $\mathbb{Q}$.

(i) La funzione $f_{a,\mathbb{Q}}$ è strettamente positiva.
(ii) Se $a > 1$ allora $f_{a,\mathbb{Q}}$ è strettamente crescente
Se $0 < a < 1$ allora $f_{a,\mathbb{Q}}$ è strettamente decrescente
(iii) $f_{a,\mathbb{Q}}$ è limitata inferiormente con $\inf f_{a,\mathbb{Q}} = 0$ non raggiunto, e non limitata superiormente.
(iv) Se $a > 1$ allora $f_{a,\mathbb{Q}}(q_0) = \sup\limits_{q<q_0} f_{a,\mathbb{Q}}(q) = \inf\limits_{q_0<q} f_{a,\mathbb{Q}}(q)$
Se $0 < a < 1$ allora $f_{a,\mathbb{Q}}(q_0) = \sup\limits_{q_0<q} f_{a,\mathbb{Q}}(q) = \inf\limits_{q<q_0} f_{a,\mathbb{Q}}(q)$

Problema. Si considerino i gruppi $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$. Esiste un'applicazione invertibile che manda la somma nel prodotto e lo zero nell'unità? Tale applicazione è unica? Fissato $a > 0$ la funzione $f_{a,\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ha queste proprietà ma non è definita su tutto $\mathbb{R}$. Ovviamente per $a = 1$ si ha una funzione che manda la somma nel prodotto e lo zero nell'unità ma non ci consente di tornare da $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ a $(\mathbb{R}, +)$. Possiamo allora riformulare il problema nel seguente modo. Fissato $a > 0$, $a \neq 1$, esiste una funzione $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $(f_a)_{|\mathbb{Q}} = f_{a,\mathbb{Q}}$ ed anche $f_a(x + y) = f_a(x)f_a(y)$? Il successivo teorema dice che una tale funzione esiste, anzi è unica una volta che fissiamo $a > 0$. Ne consegue che per ogni $a > 0$, $a \neq 1$ esiste un'unico *isomorfismo* da $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ che manda 1 in a.

Teorema 5. **Funzione esponenziale.** Sia assegnato $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Si considera la funzione $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f_a(x) := \sup_{\substack{q<x \\ q\in\mathbb{Q}}} a^q = \inf_{\substack{x<q \\ q\in\mathbb{Q}}} a^q \qquad \text{se } a > 1$$
$$f_a(x) := \sup_{\substack{x<q \\ q\in\mathbb{Q}}} a^q = \inf_{\substack{q<x \\ q\in\mathbb{Q}}} a^q \qquad \text{se } 0 < a < 1$$

La funzione f_a gode delle seguenti proprietà

(1) Il dominio di f_a è $\mathbb{R}$, i valori si denotano anche con i simboli: $f_a(x) = a^x = \exp_a(x)$.
(2) $(f_a)_{|\mathbb{Q}} = f_{a,\mathbb{Q}}$
(3) Se $a > 1$ allora f_a è strettamente crescente
Se $0 < a < 1$ allora f_a è strettamente decrescente
(4) Per l'immagine si ha $f_a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$. In particolare f_a è limitata inferiormente con $\inf f_a = 0$ non raggiunto, e non limitata superiormente.
(5) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $a > 0, a \neq 1$,
$a^x a^y = a^{x+y}$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $a > 0, a \neq 1$,
$(a^x)^y = a^{xy}$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $a > 0, a \neq 1$,
$a^x b^x = (ab)^x$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $a > 0, a \neq 1$, $b > 0, b \neq 1$.

Esercizio fondamentale 4. Saper disegnare i grafici di f_a al variare di $0 < a < 1$ sullo stesso riferimento cartesiano
Saper disegnare i grafici di f_a al variare di $a > 1$ sullo stesso riferimento cartesiano.

Teorema 6. **Funzione logaritmo** Sia $a > 0$, $a \neq 1$. Essendo l'esponenziale una funzione strettamente crescente, possiamo invertirla sul suo codominio. L'inversa della ridotta di $f_a(x) = a^x$ alla semiretta $]0, +\infty[$ e si chiama *funzione logaritmo in base* a e si indica con $(f_a)^{-1}(x) = \log_a(x)$.

(1) $a > 1$ se e solo se $\log_a x > 0$ in $]1, +\infty[$
$0 < a < 1$ se e solo se $\log_a x > 0$ in $]0, 1[$
(2) Se $a > 1$ allora la funzione $\log_a : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente
Se $0 < a < 1$ allora la funzione $\log_a : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ è strettamente decrescente
(3) $\lg_a(x)$ non è limitata su $]0, +\infty[$ inoltre $\lg_a(\mathbb{R}^*_+) = \mathbb{R}$.
(4) Valgono le seguenti proprietà
  (a) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^*_+$
  (b) $\log_a(x^b) = b \log_a(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^*_+$ e $b \in \mathbb{R}$
  (c) $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^*_+$, $b \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}$.

Convenzione 1. Tra le basi per la funzione esponenziale e logaritmo, è privilegiata la base 10, in tal caso si scrive $\log_{10} = \mathrm{Log}$ e si parla di Logaritmo decimale ed il numero di Nepero $\mathrm{e} = 2.71828182\ldots$ In particolare $\log_{\mathrm{e}}(x)$ si può scrivere $\ln(x)$ oppure Ln cioè logaritmo naturale. Sono invece ambigue le notazioni lg come logaritmo decimale oppure binario (base 2), e la notazione log che su alcuni testi sta per $\log_{10}$ in altri per $\log_{\mathrm{e}}$, verificare nel testo a cosa ci si riferisce.

Esercizio 1. Completare le seguenti formule con $a > 0, a \neq 1$

$$\begin{aligned}
&\log_a 1 = \ldots \\
&\log_a(xy) = \ldots \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R} \text{ tali che } xy > 0 \\
&\log_a \frac{1}{y} = \ldots \quad \text{per ogni } y > 0 \\
&\log_a \frac{x}{y} = \ldots \quad x, y \in \mathbb{R} \text{ tali che } xy > 0
\end{aligned}$$

Esercizio fondamentale 5. Saper disegnare i grafici di $x \mapsto lg_a(x)$ al variare di $a > 0$, $a \neq 1$ sullo stesso riferimento cartesiano.

Teorema 7. **La funzione potenza ad esponente reale** Si fissi $\alpha \in \mathbb{R}$ e si considera la funzione $f_\alpha : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ tale che $f_\alpha(x) = x^\alpha := \exp(\alpha \lg x)$.

(1) Se $\alpha \in \mathbb{N}^*$ allora f_α è la restrizione a $\mathbb{R}^*_+$ della funzione potenza.
Se $\alpha \in -\mathbb{N}^*$ allora f_α è la restrizione a $\mathbb{R}^*_+$ della funzione reciproca della funzione potenza.
Se $\alpha = 0$ allora f_α è la restrizione a $\mathbb{R}^*_+$ della funzione costante di costante valore 1.
Se $\alpha = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}^*$ allora f_α è la restrizione a $\mathbb{R}^*_+$ della funzione $f_{\frac{1}{n}}$
Se $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \frac{n}{d}$, allora f_α è la restrizione a $\mathbb{R}^*_+$ della funzione $f_{\frac{1}{d}} \circ f_n$
Se $\alpha \in \mathcal{I}_+$, allora possiamo prolungarla per $x = 0$ facendo assumere al prolungamento il valore $\tilde{f}_\alpha(0) = 0$.
(2) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora $f_{\alpha+\beta} = (f_\alpha) \cdot (f_\beta)$.
(3) Se $\alpha > 0$ allora la funzione f_α è strettamente crescente
Se $\alpha < 0$ allora la funzione f_α è strettamente decrescente
(4) Per l'immagine si ha $f_\alpha(\mathbb{R}^*_+) = \mathbb{R}^*_+$. In particolare f_α non è limitata superiormente ma è limitata inferiormente con $\inf f_\alpha = 0$ non raggiunto a meno di considerarne i prolungamenti per $\alpha > 0$.

Esercizio fondamentale 6. $a \neq 1$ Saper disegnare i grafici di $x \mapsto x^\alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ nello stesso riferimento cartesiano.

Teorema 8. **Le funzioni iperboliche** Si definiscono le seguenti funzioni

- Funzione seno-iperbolico: $\mathrm{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\mathrm{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- Funzione coseno-iperbolico: $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- Funzione tangente-iperbolico: $\mathrm{tgh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\mathrm{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Si hanno le seguenti proprietà

(1) Il dominio delle funzioni iperboliche è $\mathbb{R}$
(2) Le funzioni iperboliche sono simmetriche (che tipo di simmetria?)
(3) $\cosh^2(x) - \mathrm{senh}^2(x) = \dots$
(4) $1 - \mathrm{tgh}^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
(5) $\cosh(x + y) = \dots$
$\mathrm{senh}(x + y) = \dots$
(6) La funzione seno-iperbolico è strettamente monotona (che tipo di monotonia?)
La funzione tangente-iperbolico è strettamente monotona (che tipo di monotonia?)
La funzione coseno-iperbolico ristretta a $[0, +\infty[$ è strettamente crecente, ristretta a $]-\infty, 0]$ è strettamente decrecente.
(7) Riguardo alle immagini si ha:

$$\mathrm{senh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$
$$\cosh(\mathbb{R}) = [1, +\infty), \quad \cosh([0, +\infty[) = [1, +\infty), \quad \cosh(] - \infty, 0]) = [1, +\infty)$$
$$\mathrm{tgh}(\mathbb{R}) =] - 1, 1[$$

(Dedurre di conseguenza il sup e l'inf di tali funzioni)
(8) Esiste l'inversa della funzione $\mathrm{senh} x$ e si chiama funzione sett–senh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, essa ha la seguente espressione analitica:

$$\text{sett–senh}(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Esiste l'inversa della ridotta restrizione funzione $\cosh x$ a $[0, +\infty[$ e si chiama funzione sett– cosh : $[1, +\infty[\to \mathbb{R}$, essa ha la seguente espressione analitica:

$$\text{sett–}\cosh(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Esiste l'inversa della funzione $\mathrm{tgh} x$ e si chiama funzione sett–tgh $:] - 1, 1[\to \mathbb{R}$, essa verifica:

$$\text{sett–tgh}(x) = \frac{1}{2} \lg \frac{x + 1}{1 - x}.$$

Esercizio fondamentale 7. Saper disegnare i grafici delle funzioni iperboliche e delle loro inverse.

Esercizio fondamentale 8. Trovare il dominio naturale delle funzioni

$$y = f(x)^{g(x)}, \quad y = \log_{f(x)}(g(x)).$$