Corso di Laurea in Matematica
LEZIONI PER IL CORSO DI ANALISI MATEMATICA n.1 n.2
A.A. 2007-2008

ARGOMENTO: SERIE NUMERICHE [1]

Dott.ssa Sandra Lucente

Indice :

[1] Versione del 13 Marzo 2009

1 Prime generalità sulle serie

Definizione 1.1. Assegnata una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali, per ogni $m \in \mathbb{N}$, si definisce *somma parziale m-esima di* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ il numero reale

$$S_m := \sum_{n=0}^{m} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_m.$$

La successione $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ viene denominata *serie di termine generale n-esimo* a_n. Una serie viene in genere indicata con il simbolo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

e talvolta anche con $a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \ldots$.

Il carattere della successione $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ viene indicato come *carattere della serie.*

Si dice che una *serie è regolare, convergente, divergente positivamente oppure divergente negativamente* se tale è la successione delle sue somme parziali. Una serie non regolare viene denominata *indeterminata.*

Nel caso in cui la serie sia regolare, il limite della successione delle somme parziali viene denominato *somma della serie* e denotato ancora con il simbolo $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$; sarà chiaro dal contesto se tale simbolo indica la serie o la sua somma.

Esplicitamente, se $S \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq \nu : \quad \left| S - \sum_{k=0}^{n} a_k \right| < \varepsilon. \\
\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall M > 0,\ \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq \nu : \quad \sum_{k=0}^{n} a_k > M. \\
\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = -\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall M > 0,\ \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq \nu : \quad \sum_{k=0}^{n} a_k < -M.
\end{aligned}$$

Notiamo infine che potremmo considerare serie per generiche successioni del tipo $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ con $n_0 \neq 0$. Quanto detto nel seguito continuerà a valere anche per queste successioni.

Esempio 1.1. Sia $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Risulta

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} 1 = m + 1$$

quindi la serie degli a_n è positivamente divergente.

Esempio 1.2. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Risulta

$$\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}} = \begin{cases} 1 & m \text{ pari} \\ 0 & m \text{ dispari} \end{cases}$$

quindi la serie degli a_n è indeterminata.

Esempio 1.3. Serie di Mengoli Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} = \left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Risulta

$$\begin{aligned} S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{m\cdot(m+1)} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = 1 - \frac{1}{m+1}. \end{aligned}$$

Passando al limite risulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{m\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = 1.$$

quindi la serie degli a_n è convergente con somma 1.

La serie di Mengoli rientra in una classe più ampia di serie per le quali possiamo facilmente stabilire il carattere.

Definizione 1.2. Assegnata una successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si considera la successione delle differenze di termini successivi della b_n, ovvero $a_n = b_{n+1} - b_n$. La serie di termine generale a_n si dice *serie telescopica.*

Teorema 1.1. Teorema sul carattere di una serie telescopica. *Sia* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. *Si consideri la serie telescopica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(b_{n+1} - b_n).$$

Risulta

- *Tale serie è regolare se e solo se lo è la successione* b_n.
- *Tale serie divergente positivamente (rispettivamente negativamente) se e solo se la successione* b_n *diverge positivamente (rispettivamente negativamente).*
- *Tale serie è convergente se e solo se la successione* b_n *è convergente.*

In quest'ultimo caso

$$\lim_n b_n = L \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(b_{n+1} - b_n) = L - b_0.$$

Dimostrazione. La somma parziale della serie è data da

$$\sum_{n=0}^{m}(b_{n+1} - b_n) = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \cdots + (b_{m+1} - b_m) = -b_0 + b_{m+1}.$$

La tesi segue per passaggio al limite. ∎

Esempio 1.4. Si consideri la successione $\left\{\lg \frac{n+1}{n}\right\}_{n\geq 1}$. La serie corrispondente divergente positivamente poichè è una serie telescopica, con $S_m = \sum_{n=1}^{m} (\lg(n+1) - \lg n) = \lg(m+1)$.

Osservazione. Abbiamo visto che data una successione $\{a_n\}_n \in \mathbb{N}$ possiamo sempre associarvi una serie telescopica di termine generale $b_n = a_{n+1} - a_n$ e somma parziale $S_m = -a_0 + a_{m+1}$. Possiamo anche notare che si può sempre costruire una serie la cui successione delle somme parziali sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si tratta della serie $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$

Esempio 1.5. La serie geometrica Un esempio importante per il seguito è dato dalla serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h^n$$

con $h \in \mathbb{R}$, la quale viene denominata *serie geometrica di ragione h.* Per ogni $m \in \mathbb{N}$, denotata con s_m la somma parziale m-esima, risulta

$$\begin{aligned} S_m &= 1 + h + \cdots + h^m \\ hS_m &= h + h^2 + \cdots + h^{m+1} \end{aligned}$$

e sottraendo si ha

$$(1-h)S_m = 1 - h^{m+1}.$$

Se $h = 1$, come visto nell'Esempio 1.1, la serie diverge. Se $h \neq 1$ si ha

$$S_m = \frac{1 - h^{m+1}}{1 - h}$$

Ricordando che

$$\lim_{m\to+\infty} h^m = \begin{cases} +\infty & \text{se } h > 1 \\ 1 & \text{se } h = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < h < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } h \leq -1 \end{cases}$$

si ha che per $|h| < 1$, la serie è convergente e risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h^n = \frac{1}{1-h}.$$

Per $h \geq 1$ la serie geometrica diverge positivamente, mentre se $h \leq -1$, la serie è indeterminata.

Alcune semplici operazioni algebriche sulle serie possono essere dedotte dai teoremi sui limiti di successioni. Il successivo risultato ci dice che per le serie valgono le operazioni ammissibili in $\hat{\mathbb{R}}$.

Teorema 1.2. *Si considerino due serie di numeri reali* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

1) Se le serie sono entrambe convergenti, anche la serie somma $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)$ *è convergente e si ha*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n;$$

2) Se una delle due serie è divergente positivamente (risp. negativamente) e se l'altra serie è convergente, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)$ *risulta divergente positivamente (risp. negativamente).*

3) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è convergente e se* $\lambda \in \mathbb{R}$*, allora anche la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n$ *è convergente e si ha* $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

4) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è divergente positivamente (rispettivamente, negativamente) e se* $\lambda > 0$*, allora anche la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\lambda a_n)$ *è divergente positivamente (rispettivamente, negativamente). Se invece* $\lambda < 0$*, la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n)$ *è divergente negativamente (rispettivamente, positivamente).*

Dimostrazione. Dimostriamo la proprietà 1), le altre si deducono in modo analogo. Sia $\{S_m\}$ la successione delle somme parziali relative alla serie di termine generale a_n e $\{T_m\}$ la successione delle somme parziali relative alla serie di termine generale b_n. Essendo

$$\sum_{n=0}^{m}(a_n + b_n) = S_m + T_m$$

per i teoremi sulle operazioni sui limiti risulta

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m}(a_n + b_n) = \lim_{m\to+\infty} S_m + \lim_{m\to+\infty} T_m = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

ovvero la tesi. □

Osservazione. Applichiamo quanto visto per la serie geometrica alla rappresentazione decimale dei numeri razionali. Sappiamo che la frazione generatrice di un numero periodico è data da

$$a_0, a_1a_2 \dots a_k\overline{a_{k+1}\dots a_n} = a_0 + \frac{a_1a_2\dots a_ka_{k+1}\dots a_n - a_1\dots a_k}{\underbrace{9\dots9}_{n-k}\underbrace{0\dots0}_{k}}$$

ad esclusione del periodo 0 e del periodo 9.
Osserviamo, mediante esempi, che tale risultato è conseguenza della somma della serie geometrica. Prima di tutto osserviamo che la convenzione dell'identificazione che si fa del periodo 9 con l'unità successiva ha ora un senso preciso. Infatti

$$0,\overline{1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{1-10^{-1}} - 1 = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9},$$

quindi, se ammettessimo il periodo 9, si avrebbe $0,\overline{9} = 9 \cdot 0,\overline{1} = 9\frac{1}{9} = 1$. Mediante la serie geometrica si possono considerare gli allineamenti decimali in ogni base (va considerata una diversa ragione della serie) Si può così dimostrare che un numero periodico resta periodico se lo si riscrive in un'altra base.

Esempio 1.6. Verifichiamo che $13/99 = 0,\overline{13}$. Risulta

$$\begin{aligned} 0,13131313.... &= \frac{13}{100} + \frac{13}{10^4} + \frac{13}{10^6} + \cdots + \frac{13}{10^{2n}} + \cdots = \frac{13}{100}(1 + 10^{-2} + \cdots + 10^{-2n} + \dots) \\ &= \frac{13}{100} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10^2}\right)^n = \frac{13}{100} \frac{1}{1 - 10^{-2}} = \frac{13}{100} \frac{100}{99} = \frac{13}{99}. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}, \dots$$

Abbiamo dunque l'impressione che i primi termini contribuiscono in modo significativo alla somma della serie; viceversa non sembra possibile cambiare questi termini in modo che questa nuova serie non converga. I prossimi risultati (Lemma 1.3, Teoremi 1.4 e 1.5) formalizzano proprio questi fenomeni.

Lemma 1.3. *Il carattere di una serie non cambia quando si alterano un numero finito di termini.*

Dimostrazione. Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni tali che

$$A = \{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq b_k\}$$

è finito. Sia $\nu = \max A$. Per ogni $n \geq \nu$ risulta $a_n = b_n$ cioè $a_n - b_n = 0$.
Per ogni $m \geq \nu$ si ha

$$\sum_{n=0}^{m} (a_n - b_n) = \sum_{n=0}^{\nu} (a_n - b_n).$$

Passando al limite su $m \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=0}^{\nu} (a_n - b_n).$$

Essendo $b_n = (b_n - a_n) + a_n$ possiamo usare il Teorema 1.2 (punto 1) per concludere che se $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge anche $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge. Mediante lo stesso teorema (punto 2) si vede che se $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge positivamente (risp. negativamente) anche $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge positivamente (risp. negativamente).

Se $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ è indeterminata, per $m \geq \nu$ risulta

$$\sum_{n=0}^{m} b_n = \sum_{n=0}^{\nu} (b_n - a_n) + \sum_{n=0}^{m} a_n.$$

Passando al limite su m, il limite del secondo membro, e quindi del primo, non esiste. Ovvero $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ è indeterminata. □

Nel caso della serie geometrica e delle serie telescopiche, abbiamo visto che si riesce a semplificare il valore delle somme parziali S_n e a calcolarne limite. Questo è purtroppo un caso piuttosto raro. Nella maggiorparte dei casi si ricorre a criteri indiretti. Il primo viene utilizzato per escludere che la serie converga.

Teorema 1.4. *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali e si supponga che la serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ sia convergente. Allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.*

Dimostrazione. Si consideri la successione $\{S_m\}_{m\in N}$ delle somme parziali della serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ e sia $S \in \mathbb{R}$ la somma della stessa serie.
Per il teorema delle successioni estratte $\lim\limits_{m\to+\infty} S_m = S = \lim\limits_{m\to+\infty} S_{m-1}$ quindi

$$\lim_{m\to+\infty} a_m = \lim_{m\to+\infty} S_m - S_{m-1} = \lim_{m\to+\infty} S_m - \lim_{n\to+\infty} S_{m-1} = S - S = 0.$$

□

Esempio 1.7. La condizione precedente non è in generale sufficiente ad assicurare la convergenza di una serie. Si pensi all'Esempio 1.4 per una serie divergente con termine generale infinitesimo. Vedremo che anche la serie armonica (Esempio 1.8) è divergente pur essendo il suo termine generale infinitesimo.

Una condizione necessaria e sufficiente di convergenza per le serie è data mediante il comportamento di una nuova serie detta *serie resto m-esimo.*

Definizione 1.3. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali e sia $m \in \mathbb{N}$. Il resto m-esimo della serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ è la serie di termine generale

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \leq m \\ a_n & n \geq m+1 \end{cases}$$

esso viene indicato con il simbolo R_m. Ovvero

$$R_m = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n.$$

In virtù del Lemma 1.3 la serie di partenza e la serie resto $m - esimo$ hanno lo stesso carattere.

Teorema 1.5. *La serie converge se e solo se la serie resto m-esimo è convergente per ogni $m \in \mathbb{N}$ e la successione $\{R_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ è infinitesima.*

Dimostrazione. Essendo $R_0 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ una implicazione è banale. Sia $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, risulta

$$R_m = \lim_K \sum_{n=0}^{K} b_n = \lim_K \sum_{n=m+1}^{K} a_n = \lim_K \sum_{n=0}^{K} a_n - \sum_{n=0}^{m} a_n = S - \sum_{n=0}^{m} a_n.$$

Passando al limite su m si ha $\lim_m R_m = 0$. □

Una ulteriore condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di una serie si ricava dal criterio di convergenza di Cauchy per le successioni.

Teorema 1.6. Criterio di Cauchy per serie *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri reali. Le seguenti proposizioni sono equivalenti*

(a) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è convergente*

(b) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu \in \mathbb{N}$ *tale che* $\forall k, m \geq \nu$: $\left|\sum_{n=0}^{k} a_n - \sum_{n=0}^{m} a_n\right| < \varepsilon.$

(c) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu \in \mathbb{N}$ *tale che* $\forall k, m \geq \nu,\ k \leq m$: $\left|\sum_{n=k+1}^{m} a_n\right| < \varepsilon.$

(d) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu \in \mathbb{N}$ *tale che* $\forall k \geq \nu,\ \forall p \in \mathbb{N}$: $\left|\sum_{n=k+1}^{k+p} a_n\right| < \varepsilon.$

Dimostrazione. Le proprietà (a) e (b) sono equivalenti per il criterio di Cauchy delle successioni applicato alle successioni delle somme parziali.

Le proprietà (b) e (c) sono equivalenti in quanto $\sum_{n=0}^{m} a_n = \sum_{n=0}^{k} a_n + \sum_{n=k+1}^{m} a_n$.

Ovviamente la proprietà (c) implica (d), scelto $m = k + p$. Viceversa fissati $k, m \in \mathbb{N}$ con $k \leq m$ esiste $p \in \mathbb{N}$ tale che $m = k + p$, quindi la proprietà (d) implica la proprietà (c). □

Un altro fondamentale esempio di serie non convergente con termine generale infinitesimo, è dato dalla serie armonica così chiamata perchè ogni termine è la media armonica del precedente e del successivo.[2]

Esempio 1.8. La serie armonica Sia data la successione $a_n = \frac{1}{n}$ per $n \geq 1$. La serie ad essa associata si chiama serie armonica. Mostriamo, mediante il criterio di Cauchy che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ non converge.

Si osserva che

$$\sum_{n=k+1}^{2(k+1)} \frac{1}{n} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k+2} \geq \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+2} + \cdots + \frac{1}{2k+2} = \frac{k+1}{2(k+1)} = \frac{1}{2}.$$

Preso dunque $\varepsilon < 1/2$ viene violata la condizione (d) del criterio di Cauchy in corrispondenza di ogni $\nu \in \mathbb{N}$, $k \geq \nu$ e $p = k + 2$.

Possiamo essere più precisi rispetto al carattere della serie armonica utilizzando un teorema di confronto che generalizza quello delle successioni.

[2] Dati a, b due numeri reali non nulli, la loro media armonica è data dalla quantità $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right]^{-1}$.

Teorema 1.7. *Si considerino due serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *e si supponga che*

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Allora

(i) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è divergente positivamente, lo è anche la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

(ii) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *è divergente negativamente, lo è anche la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Dimostrazione. Sommando termine a termine le disuguaglianze $a_n \leq b_n$, fissato $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sum_{n=0}^{m} a_n \leq \sum_{n=0}^{m} b_n.$$

Per ottenere (i) e (ii) basta applicare il teorema di confronto per successioni. $\square$

Esempio 1.9. La serie armonica diverge positivamente ovvero

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Sappiamo che la successione

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è crescente e convergente al suo sup pari al numero di Nepero e. Quindi

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}.$$

Essendo la funzione $y = \ln x$ crescente, dalla precedente disuguaglianza si deduce che

$$1 = \ln e \geq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

In conclusione

$$\frac{1}{n} \geq \ln \frac{n+1}{n}.$$

Considerando la somma parziale abbiamo

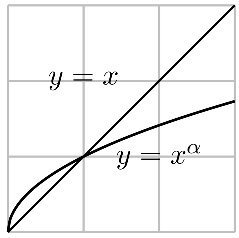
$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^{m} \ln \frac{n+1}{n}.$$

Operando come nell'Esempio 1.4 possiamo concludere che

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \geq \ln(m+1).$$

Passando al limite per $m \to +\infty$, essendo $\{\ln(m+1)\}$ una successione divergente, per i teoremi di confronto delle successioni risulta S_m divergente e quindi la serie armonica è divergente.

Esempio 1.10.



La serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con esponente $0 < \alpha < 1$ **diverge.** Se $0 < \alpha < 1$ essendo $n \geq 1$, risulta $n^\alpha < n$ quindi $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$. Quindi la serie armonica è minorante per la serie armonica generalizzata di esponente $0 < \alpha < 1$ che dunque diverge per confronto.

2 Serie a termini non negativi

Definizione 2.1. Una serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ viene denominata *serie a termini positivi* (oppure a termini strettamente positivi).
Se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si dice che la *serie è a termini non negativi.*
Se $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq \nu$, con $\nu \in \mathbb{N}$ assegnato, allora la serie si dice *definitivamente* a termini non negativi. Analogamente si definiscono le serie a termini definitivamente positivi.

Teorema 2.1. Teorema di regolarità delle serie a termini non negativi. Una serie a termini non negativi converge o diverge positivamente. In particolare essa converge se e solo se la successione delle somme parziali è limitata.

Dimostrazione. Per serie a termini non negativi la successione delle somme parziali risulta crescente; infatti

$$S_{m+1} = S_m + a_{m+1} \geq S_m$$

quindi

$$\lim_m S_m = \sup_m S_m.$$

Se le somme parziali sono limitate superiormente la successione $\{S_m\}$ e quindi la serie converge. Se $\sup\limits_m S_m = +\infty$ la serie diverge positivamente. ◻

Osservazione. Grazie al Lemma 1.3 il teorema precedente si estende a serie a termini definitivamente non negativi. Per serie a termini negativi, applicando il teorema precedente alla serie di termine generale $-a_n$ e ricordando il Teorema 1.2 avremo convegenza oppure negativa divergenza.

Osservazione. Per indicare che una serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ a termini non negativi è convergente, ha senso scrivere $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$. Tale notazione non ha senso se la serie non è a termini non-negativi.

Osservazione. Una serie a termini non negativi per cui non sia verificata la condizione necessaria diverge.

Esempio 2.1. La serie armonica non verifica il criterio di Cauchy, quindi non converge. Essendo a a termini positivi essa diverge.

Per tali serie è possibile stabilire diversi criteri di convergenza.

2.1 Criteri di confronto e criterio di condensazione

I criteri di confronto estendono quanto fatto nella dimostrazione della divergenza della serie armonica. Un primo criterio elementare di confronto si può ricavare direttamente dai teoremi di confronto per i limiti.

Teorema 2.2. Criterio di confronto Si considerino due serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ e si supponga che esista $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \nu. \tag{2}$$

Allora

(i) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è divergente positivamente, lo è anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

(ii) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è convergente, lo è anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(iii) Sia $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è convergente, lo è anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e si ha la seguente disuguaglianza delle somme delle serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Dimostrazione. Si pone

$$\tilde{b}_n = \begin{cases} a_n & n \leq \nu \\ b_n & n \geq \nu + 1. \end{cases}$$

Le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{b}_n$ differiscono per un numero finito di termini e quindi per il Lemma 1.3 hanno lo stesso carattere.

Sommando termine a termine le disuguaglianze $a_n \leq \tilde{b}_n$, fissato $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sum_{n=0}^{m} a_n \leq \sum_{n=0}^{m} \tilde{b}_n.$$

Per ottenere (i) basta applicare il teorema di confronto per successioni e tornare da $\tilde{b}_n$ a b_n.
Per il punto (ii) bisogna combinare il teorema di confronto per successioni, il Lemma 1.3 con il precedente criterio di regolarità delle serie a termini non negativi.
Infine per (iii), abbiamo che $\sum_{n=0}^{m} a_n - \sum_{n=0}^{m} b_n \leq 0$ e sappiamo che esistono $A, B \geq 0$ tali che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = B$. Per il teorema di permanenza delle disuguaglianze $A \leq B$. □

Osserviamo che la disuguaglianza tra le somme delle serie non vale se la la disuguaglianza $a_n \leq b_n$ è verificata solo definitivamente. In generale, quando si cambiano un numero finito di termini, non cambia il carattere della serie, ma in caso di convergenza cambia la somma della serie stessa.

Teorema 2.3. Criterio del confronto asintotico *Si considerino due serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *a termini non negativi e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *a termini strettamente positivi. Si supponga che esista il limite*

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \ell.$$

1. *Se* $\ell > 0$, $\ell \in \mathbb{R}$, *le due serie hanno lo stesso carattere.*
2. *Se* $\ell = 0$ *e se la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *è convergente, anche la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è convergente. Se invece la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è divergente positivamente, anche la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *è divergente positivamente.*
3. *Se* $\ell = +\infty$ *se la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è convergente, anche la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *converge, mentre se la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *è divergente positivamente anche la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è divergente positivamente.*

Dimostrazione.

1. Dalla definizione di limite, in corrispondenza di $\varepsilon = \ell/2 > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\ell/2 < a_n/b_n < 3\ell/2$ per ogni $n \geq \nu$, da cui
$$\frac{\ell}{2} b_n < a_n < \frac{3\ell}{2} b_n.$$
Applicando il precedente criterio di confronto e il Teorema 1.2 (3), tenendo conto di entrambe le diseguaglianze, si deduce che le due serie hanno lo stesso carattere.
2. Dalla definizione di limite, con $\epsilon = 1$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_n/b_n < 1$ per ogni $n \geq \nu$, da cui
$$a_n < b_n.$$
Anche in questo caso si può concludere applicando il criterio di confronto.
3. Basta applicare il caso 2) invertendo i ruoli delle due serie infatti in questo caso $\lim_n b_n/a_n = 0$. L'ipotesi a_n a termini strettamente positivi è definitivamente verificata essendo $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

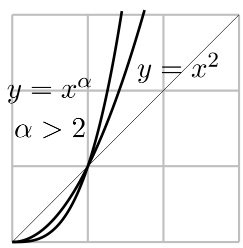
$\square$

Esempio 2.2. La serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ **con esponente** $\alpha \geq 2$ **converge.**

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ si confronta asintoticamente alla serie di Mengoli studiata nell'Esempio 1.3:

$$\lim_n \frac{1/n^2}{1/(n(n+1))} = 1.$$

Poichè la serie di Mengoli converge, per il precedente criterio, anche la serie armonica generalizzata di esponente 2 converge.
Se $\alpha > 2$ essendo $n \geq 1$, risulta $n^\alpha > n^2$ quindi $\frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n^2}$. Quindi la serie armonica generalizzata di esponente $\alpha > 2$ converge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 2$.



Mediante i teoremi di confronto non abbiamo alcuna informazione sulla serie armonica nel caso $1 < \alpha < 2$. Questo caso sarà trattato in tre modi diversi.

Teorema 2.4. Criterio di condensazione di Cauchy. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente di numeri reali non negativi. La serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se la serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ converge.

Dimostrazione. Trascuriamo per semplicità il primo termine di $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ Sia $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali di $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\{T_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali di $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$.
Essendo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una decrescente si ha

$$\begin{aligned} a_1 &= 2^0 a_{2^0} \\ a_2 + a_3 \le a_2 + a_2 = 2a_2 &= 2^1 a_{2^1} \\ a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \le a_4 + a_4 + a_4 + a_4 = 4a_4 &= 2^2 a_{2^2} \\ a_8 + a_9 + \cdots + a_{15} \le 8a_8 &= 2^3 a_{2^3} \\ &\cdots \\ \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n \le 2^k a_k &= 2^k a_{2^k} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Sommando queste disuguaglianze otteniamo

$$S_{2^{k+1}-1} \le T_k.$$

Utilizzando il teorema di confronto per successioni, vogliamo provare che se $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge allora $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge. Ricordiamo che

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \exists \nu \in \mathbb{N},\ \text{tale che}\ m < 2^{\nu+1} - 1.$$

Questa relazione segue ad esempio dalla definizione di limite applicata a

$$\lim_k 2^{k+1} - 1 = +\infty.$$

Essendo poi $\{S_m\}$ crescente, per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ per cui

$$S_m < S_{2^{\nu+1}-1} \le T_\nu$$

Se $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge, essendo monotona, è limitata. Dunque $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ è limitata e quindi la serie di partenza è convergente perchè a termini positivi.

Viceversa si nota che

$$\begin{array}{rcl} a_1 \geq \dfrac{a_1}{2} & = & \dfrac{1}{2}2^0 a_{2^0} \\ a_2 \geq \dfrac{2a_2}{2} & = & \dfrac{1}{2}2^1 a_{2^1} \\ a_3 + a_4 \geq a_4 + a_4 = 2a_4 & = & \dfrac{1}{2}2^2 a_{2^2} \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq a_8 + a_8 + a_8 + a_8 = 4a_8 & = & \dfrac{1}{2}2^3 a_{2^3} \\ & \cdots & \\ \displaystyle\sum_{n=2^{k-1}-1}^{2^k} a_n \geq 2^{k-1} a_k & = & \dfrac{1}{2}2^k a_{2^k} \\ & \cdots & \end{array}$$

Sommando otteniamo

$$S_{2^n} \geq \frac{1}{2} T_n$$

Se $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge allora è limitata quindi $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata e dunque convergente perchè a termini positivi. $\square$

Esempio 2.3. La serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$ e diverge positivamente se $\alpha \leq 1$.

Sia

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad n \geq 1$$

Essendo una serie a termini positivi la sua convergenza sarà equivalente alla convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n \quad n \geq 0.$$

Tale serie, è la serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$, quindi converge se e solo se $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ ovvero $\alpha > 1$.

Inoltre nella dimostrazione del criterio di condensazione abbiamo provato che le somme parziali della serie di partenza sono maggiorate dalla somma della serie di termine generale $2^n a_{2^n}$. Passando al limite, tale disuguaglianza si conserva, dunque si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n = \frac{1}{1-2^{1-\alpha}} = \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2}. \tag{3}$$

Con strumenti più sofisticati si provano alcune somme della serie armonica generalizzata, ad esempio se $\alpha = 2$ si prova che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Utilizzando la serie armonica generalizzata nel criterio del confronto asintotico, si ha il seguente.

Corollario 2.5. Criterio degli infinitesimi. Sia $p \in \mathbb{R}$. Si consideri $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ a termini non negativi e si supponga che esista il limite

$$\lim_n n^p a_n = \ell \in \tilde{\mathbb{R}}.$$

1. Se $\ell > 0$, $\ell \in \mathbb{R}$, la serie data ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.
2. Se $\ell = 0$ e $p > 1$ la serie data converge.
3. Se $\ell = +\infty$ e $p \leq 1$ la serie data diverge positivamente.

2.2 Criterio della radice, del rapporto e di Raabe

Richiamo. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali limitata.

Si dice che ℓ è il *minimo limite* della successione e si scrive

$$\liminf_n x_n = \ell$$

se sono verificate le seguenti due proprietà caratteristiche

ℓ.I) $\forall\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$ risulta $\ell - \varepsilon < x_n$.

ℓ.II) $\forall\varepsilon > 0$ e per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$ per cui $x_n < \ell + \varepsilon$.

Analogamente, si dice che L è il *massimo limite* della successione e si scrive

$$\limsup_n x_n = L$$

se sono verificate le seguenti due proprietà caratteristiche

L.I) $\forall\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$ risulta $x_n < L + \varepsilon$.

L.II) $\forall\varepsilon > 0$ e per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$ per cui $L - \varepsilon < x_n$.

Se la successione è illimitata inferiormente si pone

$$\liminf_n x_n = -\infty$$

Se la successione è illimitata superiormente si pone

$$\liminf_n x_n = +\infty$$

Nella pratica il calcolo del massimo e minimo limite di una successione corrisponde all'individuare il più grande e il più piccolo valore di aderenza della successione, cioè il più grande e il più piccolo elemento di $\tilde{\mathbb{R}}$ a cui tende una estratta della successione data.

Teorema 2.6. Criterio della radice. *Sia* $L \in \hat{\mathbb{R}}$. *Sia* $\{a_n\}$ *il termine generale di una serie a termini non negativi, ovvero* $a_n \geq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *Sia*

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Allora, se $L > 1$ *la serie* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *diverge positivamente, se* $L < 1$ *la serie* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *converge.*

Dimostrazione. Sia $L \in \mathbb{R}$ tale che $L > 1$ scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo che $L - \varepsilon > 1$ Per le proprietà caratteristiche del massimo limite, per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq \nu$ per cui risulta $\sqrt[n]{a_n} > L - \varepsilon$ ossia $a_n > (L-\varepsilon)^n$ per infiniti indici. La serie non pu convergere perchè il suo termine generale non tende a zero. Essendo a termini non-negativi, la serie diverge positivamente.

Se $L = +\infty$ allora la successione non è limitata quindi non può essere infinitesima. Nuovamente il termine generale della serie non tende a zero e quindi la serie essendo a termini non negativi diverge positivamente.

Se $L < 1$ scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo che $L + \varepsilon < 1$ Per le proprietà caratteristiche del massimo limite, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu$ risulta $\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$ ossia $a_n < (L+\varepsilon)^n$. La serie data è definitivamente maggiorata dalla serie geometrica di ragione $L + \varepsilon < 1$. Per confronto la serie data converge. □

Ricordiamo che se una successione converge se e solo se il massimo limite coincide con il minimo limite. Inoltre il limite della successione è esattamente il massimo limite, ovvero il minimo limite.

Corollario 2.7. Criterio della radice. *Sia* $L \in \hat{\mathbb{R}}$. *Sia* a_n *il termine generale di una serie a termini non negativi. Supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Allora, se $L > 1$ *la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *diverge positivamente, se* $L < 1$ *la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge.*

Osserviamo che il criterio della radice è inefficace per $\ell_1 = 1$, in particolare non dà informazioni per la serie armonica generalizzata.

Richiamo. Per i Teoremi di tipo Cesaro il limite della radice n-esima di una successione è legato al limite del tasso di crescita della successione. Precisamente, se $a_n > 0$ per ogni $n \geq 0$ allora

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell.$$

Dal precedente corollario si deduce subito il seguente risultato.

Teorema 2.8. Criterio del rapporto. *Sia* $L \in \hat{\mathbb{R}}$. *Sia* a_n *il termine generale di una serie a termini strettamente positivi. Supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Allora, se $L > 1$ *la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge positivamente, se* $L < 1$ *la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*

Anche tale risultato può enunciarsi facendo uso del massimo e minimo limite di a_n.

Teorema 2.9. Criterio del rapporto. *Siano* $\ell, L \in \hat{\mathbb{R}}$. *Sia* $\{a_n\}$ *il termine generale di una serie a termini positivi, ovvero* $a_n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *Siano*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \qquad \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Allora, se $\ell > 1$ *la serie* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *diverge positivamente, se* $L < 1$ *la serie* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *converge.*

Dimostrazione. Se $\ell > 1$ la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente crescente. Infatti per la prima proprietà del minimo limite, preso $\varepsilon = \ell - h$ con $1 < h < \ell$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che Per ogni $n \geq \nu$ risulta $\frac{a_{n+1}}{a_n} > h > 1$, ovvero $a_{n+1} > a_n$. Essendo a termini positivi, la serie ottenuta da una successione strettamente crescente non può essere infinitesima. Essendo violata la condizione necessaria per la convergenza della serie, ed essendo la serie a termini positivi essa deve essere divergente positivamente.

Se $L < 1$,si può considerare $q \in \mathbb{R}$ tale che $L < q < 1$. Applichiamo la proprietà caratteristica del massimo limite con $\varepsilon = q - L > 0$. Esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \nu$ risulta $a_{n+1}/a_n < q$, da cui $a_{n+1} < qa_n$. Per ogni $n \geq \nu$ risulta

$$a_n \leq q^{n-\nu} a_\nu.$$

infatti, tale proprietà è ovviamente vera per $n = \nu$ e, supposta vera per un certo $n \geq \nu$, si ha $a_{n+1} < qa_n < qq^{n-\nu}a_\nu = q^{n+1-\nu}a_\nu$.

In definitiva, per ogni $k \in \mathbb{N}$ risulta

$$a_\nu + a_{\nu+1} + \cdots + a_{\nu+k} \leq a_\nu(1 + q + \cdots + q^k).$$

Per confronto con la serie geometrica di ragione $q < 1$ abbiamo che

$$\sum_{n=\nu}^{+\infty} a_n \quad \text{converge.}$$

Poichè il comportamento della serie non cambia alterando un numero finito di termini, anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. □

Osserviamo che il criterio del rapporto nella forma del Teorema 2.8 è inefficace per $L = 1$, in particolare non dà informazioni per la serie armonica generalizzata.

Ci si potrebbe chiedere se nelle applicazioni convenga utilizzare il criterio della radice o quello del rapporto o se è indifferente. Mostriamo che il criterio della radice è più efficace nel senso che tutte le volte che il criterio del rapporto dà la convergenza, lo stesso vale per il criterio della radice. Ogni volta che il criterio della radice non dà informazioni, lo stesso vale per il criterio del rapporto. È solo per una opportunità di calcolo che scegliamo di applicare in molte situazioni il criterio del rapporto.

Proposizione 2.10. *Sia* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione a termini strettamente positivi. Si hanno le seguenti relazioni.*

$$\limsup_n \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_n \frac{c_{n+1}}{c_n} \tag{4}$$

$$\liminf_n \sqrt[n]{c_n} \geq \liminf_n \frac{c_{n+1}}{c_n} \tag{5}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la (4), analogamente si procede per (5).

Sia $L_2 = \limsup_n \frac{c_{n+1}}{c_n}$. Se $L_2 = +\infty$ l'asserto è banale. Sia $L_2 \in \mathbb{R}$. Dalla prima proprietà del massimo limite, in corrispondenza di $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu$ si ha

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \leq L_2 + \varepsilon.$$

Questo implica che $c_{n+1} \leq (L_2+\varepsilon)c_n$ e, come visto nella dimostrazione del criterio del rapporto, per ogni $n \geq \nu$ risulta $c_n \leq (L_2+\varepsilon)^{n-\nu}c_\nu$. Ne deduciamo che

$$\sqrt[n]{c_n} \leq (L_2+\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{c_\nu}{(L_2+\varepsilon)^\nu}}.$$

Passando al limsup su n e mandando ε a zero si ha l'asserto. $\square$

Per chiarire ancora meglio la relazione tra i due criteri diamo un esempio di serie per cui il criterio del rapporto non dà informazioni mentre il criterio della radice risulta efficace.

Esempio 2.4. Si consideri la serie associata alla successione

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & n \text{ pari} \\ 3^{-n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Volendo utilizzare il criterio del rapporto abbiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n & n \text{ pari} \\ \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Quindi si ha

$$\liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \quad \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty. \tag{6}$$

Il criterio del rapporto è quindi inapplicabile.

Viceversa

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & n \text{ pari} \\ \\ \frac{1}{3} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Quindi

$$\limsup_n \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1. \tag{7}$$

La serie converge per il criterio della radice.

Osservazione. Accenniamo, senza dimostrarlo, che il criterio degli infinitesimi è più efficace del criterio della radice, nel senso che tutte le volte che il criterio della radice fornisce informazioni, le avrebbe fornite anche il criterio degli infinitesimi. Vi sono serie per cui il criterio della radice è inefficace, mentre quello degli infinitesimi dà informazioni.

Nei casi in cui sia il criterio della radice che quello del rapporto sono inefficaci, viene utilizzato un criterio ancora più generale.

Teorema 2.11. Criterio di Raabe. *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali strettamente positivi. Supponiamo che esista*

$$\lim_n n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=L_R\in\hat{\mathbb{R}}.$$

Se $L_R>1$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. Se $L_R<1$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge positivamente.

Dimostrazione. Sia $L_R>1$. Applichiamo la definizione di limite con $\varepsilon<L_R-1$. Ovvero $L_R-\varepsilon>1$. Poniamo

$$h=L_R-\varepsilon-1>0.$$

Esiste $\nu\in\mathbb{N}$ tale che, per ogni $n\geq\nu$ risulta

$$n\,(a_n/a_{n+1}-1)>(L_R-\varepsilon). \tag{8}$$

In particolare per ogni $n\geq\nu$ si ha

$$na_n-na_{n+1}>(L_R-\varepsilon)a_{n+1}>a_{n+1}.$$

Da ciò segue $na_n>(n+1)a_{n+1}$. Ovvero, la successione $\{na_n\}$ è strettamente positiva e decrescente, quindi convergente. Per il Teorema 1.1, converge anche la serie telescopica associata a questa successione:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} na_n-(n+1)a_{n+1}<+\infty$$

Da (8) segue anche che per ogni $n\geq\nu$, si ha anche

$$na_n-(n+1)a_{n+1}>ha_{n+1}.$$

In definitiva

$$a_{n+1}<\frac{1}{h}(na_n-(n+1)a_{n+1}).$$

La serie data converge allora per confronto con la serie telescopica $\frac{1}{h}\sum_{n=0}^{+\infty}(na_n-(n+1)a_{n+1})<+\infty$.

Sia $L_R<1$. Per il Teorema della permanenza delle disuguaglianze, esiste $\nu\in\mathbb{N}$ tale che per ogni $n\geq\nu$ risulta

$$n\,(a_n/a_{n+1}-1)\leq 1.$$

In particolare per ogni $n \geq \nu$ si ha
$$na_n - na_{n+1} \leq a_{n+1}.$$
Da ciò segue $na_n \leq (n+1)a_{n+1}$. Ovvero, la successione $\{na_n\}$ è strettamente positiva e crescente. In particolare $(\nu+1)a_{\nu+1} \geq \nu a_\nu$, $(\nu+2)a_{\nu+2} \geq (\nu+1)a_{\nu+1} \geq \nu a_\nu$. Iterando questo procedimento, si ottiene che per ogni $n \geq \nu$
$$a_n \geq \frac{\nu a_\nu}{n}.$$
La serie data diverge per confronto con la serie armonica. □

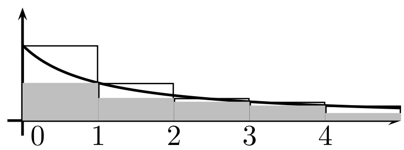
Esempio 2.5. Osserviamo che, contrariamente al criterio della radice e del rapporto, il criterio di Raabe si applica alla serie armonica generalizzata. Infatti se $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, allora
$$\lim_n n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_n \frac{\left(\frac{1}{n}+1\right)^\alpha - 1}{\frac{1}{n}} = \alpha. \tag{9}$$
Quindi se $\alpha > 1$ la serie converge, se $\alpha < 1$ la serie diverge.
Nel caso $\alpha = 1$ il criterio non ci dice nulla ($L_R = 1$), come ci si aspetta avendo usato proprio la divergenza di tale serie nella dimostrazione del criterio.

2.3 Criterio dell'integrale

Diamo un ulteriore criterio che relaziona la convergenza di una serie a termini non negativi con la convergenza di un integrale improprio. Il criterio può essere usato anche per stabilire la convergenza di un integrale improprio in un intorno di $+\infty$ partendo dalla convergenza di una serie.

Teorema 2.12. *Sia $f : [0+\infty) \to [0, +\infty)$ una funzione non negativa decrescente. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ risulta convergente se e solo se la funzione f è integrabile in un intorno di $+\infty$. Inoltre*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq \int_0^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n). \tag{10}$$

Dimostrazione. Essendo f decrescente, per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta
$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) \quad \forall x \in [n, n+1].$$



Inoltre la funzione f è integrabile su ciascuno di questi intervalli perchè monotona.
Integrando la precedente relazione nell'intervallo $[n, n+1]$, si ottiene $f(n+1) \leq \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$
Sommando sugli interi n tra zero ed $m \in \mathbb{N}$ risulta
$$\sum_{n=0}^{m} f(n+1) \leq \int\limits_0^m f(x)dx \leq \sum_{n=0}^{m} f(n).$$

Cambiando variabile nella prima sommatoria, si ha

$$\sum_{n=1}^{m+1} f(n) \le \int_0^m f(x)dx \le \sum_{n=0}^{m} f(n).$$

Indicando con $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali delle serie a termini non negativi di termine generale $f(n)$ abbiamo ottenuto che

$$S_{m+1} - f(0) \le \int_0^m f(x)dx \le S_m.$$

Se l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge si ha che $\{S_{m+1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ è limitata dunque $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ è limitata, quinid convergente e vale la prima disuguaglianza.

Se la serie converge, risulta $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ limitata e quindi per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha $\int_0^m f(x)dx \le S$ essendo S la somma della serie data. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ può convergere o divergere positivamente essendo f positiva. Se per assurdo divergesse positivamente, in corrispondenza di S esisterebbe $\delta > 0$ tale che per ogni $t \ge \delta$ $\int_0^t f(x)dx > S$. Tale condizione è violata dagli interi $m > \delta$.

Essendo la funzione integrale continua, la seconda disuguaglianza segue da $\int_0^m f(x)dx \le S$ per passaggio al limite. □

Osservazione. Il teorema si estende facilmente a serie del tipo $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$. Considerata $f : [n_0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una funzione non negativa decrescente, si ha

$$\sum_{n=n_0}^{m+1} f(n) \le \int_{n_0}^m f(x)dx \le \sum_{n=n_0}^{m} f(n).$$

Quindi la serie $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$ risulta convergente se e solo f è integrabile in un intorno di $+\infty$. Inoltre

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \le \int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx \le \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n).$$

Corollario 2.13. Stima del resto m-esimo di una serie *Sia $m \in \mathbb{N}$. $f : [m+1+\infty) \to [0, +\infty)$ una funzione non negativa decrescente. Il resto m-esimo della serie di termine generale $f(n)$ è stimato da*

$$\int_{m+1}^{+\infty} f(x)dx \le \sum_{n=m+1}^{+\infty} f(n) \le \int_m^{+\infty} f(x)dx.$$

Esempio 2.6. Fissato $\alpha > 0$ la funzione $f(x) = x^{-\alpha}$ è decrescente e positiva. Essa è integrabile in un intorno di $+\infty$ se e solo se $\alpha > 1$. Ne deduciamo che la serie armonica generalizzata converge se e solo se $\alpha > 1$. Operando come nel precedente corollario, si ha una stima della somma della serie

$$\frac{1}{\alpha-1} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \le 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx \le \frac{\alpha}{\alpha-1} = 1 + \frac{1}{\alpha-1}.$$

Tale stima è molto meno accurata di quella ottenuta in (3).

3 Serie a segno qualunque

3.1 Serie assolutamente convergenti

Definizione 3.1. Serie assolutamente convergenti. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Si può considerare la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

di termine generale n-esimo $|a_n|$; tale serie è a termini positivi e quindi deve essere o convergente o divergente positivamente. Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è assolutamente convergente (risp. assolutamente divergente) se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ è convergente (risp. divergente positivamente).

Mostriamo che la condizione di assoluta convergenza è più restrittiva di convergenza di una serie.

Teorema 3.1. *Ogni serie assolutamente convergente è convergente e risulta*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|. \tag{11}$$

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è assolutamente convergente. Usiamo la relazione

$$a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|.$$

Data l'ipotesi di assoluta convergenza, per il Teorema 1.2, punto (i) la tesi seguirà dimostrando che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + |a_n|) \text{ converge.}$$

Questa serie è a termini positivi, essendo $x + |x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre $a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$, quindi la serie è maggiorata da un serie convergente e converge per confronto. Per dimostrare (11) basta applicare la disuguaglianza triangolare alla successione delle somme parziali. □

Osservazione. La disuguaglianza (11) estende ad una quantità numerabile di termini la disuguaglianza triangolare. Combinando la disuguaglianza triangolare per un numero finito di termini, con la condizione di Cauchy per $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$, si trova immediatamente la condizione di Cauchy per $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. In questo modo si ha un'altra dimostrazione del precedente teorema.

L'assoluta convergenza è solo una condizione necessaria per la convergenza, non è una condizione sufficiente. Una serie convergente ma non assolutamente convergente sarà descritta nell'Esempio 3.1

Riscriviamo in termini di assoluta convergenza i criteri della radice e del rapporto.

Teorema 3.2. *Sia* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *una serie di numeri reali.*

(i) Sia $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \in \hat{\mathbb{R}}$.

- *Se* $L < 1$ *la serie data converge assolutamente e quindi converge.*
- *Se* $L > 1$ *la serie data non converge.*

(ii) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *a termini non definitivamente nulli. Siano*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell_2' \in \hat{\mathbb{R}}, \quad \limsup_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L_2 \in \hat{\mathbb{R}}.$$

- *Se* $L_2 < 1$ *la serie data converge assolutamente e quindi converge.*
- *Se* $\ell_2' > 1$ *la serie data non converge.*

Qualora esistano $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$ *(oppure* $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$*), nei precedenti enunciati possiamo sostituire il limite della radice (risp. del rapporto) al massimo e minimo limite della radice (risp. del rapporto).*

Dimostrazione. Utilizzando i corrispondenti criteri per la serie a termini positivi, i casi $L < 1$ ed $L_2 < 1$ discendono dal fatto che l'assoluta convergenza implica la convergenza della serie.
Per il caso $L_2 > 1, \ell_2' > 1$ si ripercorrono le dimostrazioni dei Teoremi 2.6, 2.9 ottenendo che $\neg(\lim_n |a_n| = 0)$. Questo equivale a $\neg(\lim_n a_n = 0)$. Viene dunque violata la condizione necessaria alla convergenza. □

L'estensione del criterio degli infinitesimo e del criterio di Raabe all'assoluta convergenza, è immediata conseguenza di quei criterio e della convergenza dedotta dalla convergenza assoluta.

Proposizione 3.3. *Sia* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *una serie di numeri reali.*

(i) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *a termini non definitivamente nulli. Supponiamo che esista*

$$\lim_n n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1\right) = L_R \in \hat{R}.$$

- *Se* $L_R > 1$ *la serie data converge assolutamente e quindi converge.*
- *Se* $L_R < 1$ *la serie data diverge assolutamente.*

(ii) Sia $p \in \mathbb{R}$. *Si supponga che esista il limite*

$$\lim_n n^p |a_n| = \ell_p \in \tilde{\mathbb{R}}.$$

(a) Sia $\ell_p > 0$, $\ell_p \in \mathbb{R}$.
Se $p > 1$ *la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge assolutamente e quindi converge.*
Se $p \leq 1$ *la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *diverge assolutamente.*

(b) Se $\ell_p = 0$ *e* $p > 1$ *la serie data converge assolutamente e quindi converge;.*

(c) Se $\ell_p = +\infty$ *e* $p \leq 1$ *la serie data diverge assolutamente.*

Osservazione. Nel Teorema 3.2, dalla divergenza assoluta prevista dai criteri della radice e del rapporto, abbiamo ricavato informazioni sulla non convergenza della serie di partenza. Questo non accade nell'estensione del Criterio di Raabe e degli infinitesimi. Ovvero ci sono serie per cui

$$\lim_n n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)<1,$$

quindi sono assolutamente divergenti, ma anche convergenti. Un esempio in tal senso è la serie armonica generalizzata a segno alterno, studiata nell'Esempio 3.2. Con lo stesso esempio si deduce che non è detto che una serie a segno non costante tale che $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$ sia asintoticamente equivalente a $\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-p}$ con $p\leq 1$ sia non convergente.

3.2 Serie a segno alterno

Definizione 3.2. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una una successione di numeri reali a segno costante ($a_n\geq 0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ oppure $a_n\leq 0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$). La serie associata alla successione $(-1)^n a_n$, ovvero $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ si dice *serie a segni alterni.*

Il criterio di Leibnitz darà una condizione sufficiente per la convergenza delle serie a segno alterno. Premettiamo il seguente lemma sulle successioni.

Lemma 3.4. *Ogni successione $\{x_n\}$ tale che la sottosuccessione dei pari $\{x_{2n}\}$ e quella dei dispari $\{x_{2n+1}\}$ hanno lo stesso limite finito, è una successione convergente.*

Dimostrazione. Si fissi $\varepsilon>0$. Per ipotesi

$$\exists\nu_P\in\mathbb{N}\text{ tale che }\forall k\in\mathbb{N},\ k\geq\nu_P\text{ risulta }|x_{2k}-\ell|\leq\varepsilon.$$
$$\exists\nu_D\in\mathbb{N}\text{ tale che }\forall k\in\mathbb{N},\ k\geq\nu_D\text{ risulta }|x_{2k+1}-\ell|\leq\varepsilon.$$

ne risulta che se $n\geq\max\{2\nu_P,2\nu_D+1\}$ si ha

$$|x_n-\ell|=\begin{cases}|x_{2k}-\ell| & n=2k,\ \text{con }k\geq\nu_P\\ |x_{2k+1}-\ell| & n=2k+1,\ \text{con }k\geq\nu_D\end{cases}.$$

Quindi $|x_n-\ell|<\varepsilon$. Ovvero si ha la convergenza della successione di partenza. □

Teorema 3.5. Criterio di Leibnitz per le serie a segno alterno.

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente ed infinitesima di numeri reali non negativi. Allora, la serie a segno alterno $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ è convergente.

Inoltre, denotata con S la somma di $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ e, per ogni $m\in\mathbb{N}$, S_m la relativa somma parziale m-esima, si ha

$$|S-S_m|\leq a_{m+1}. \tag{12}$$

Dimostrazione. Tenendo presente che la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, valgono le relazioni

$$\begin{aligned} S_{2(m+1)} &= S_{2m} - (a_{2m+1} - a_{2m+2}) \leq S_{2m}; \\ S_{2m+1} &= S_{2m-1} + (a_{2m} - a_{2m+1}) \geq S_{2m-1}. \end{aligned}$$

Ne segue che la sottosuccessione $\{S_{2m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ è decrescente, mentre la sottosuccessione $\{S_{2m+1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ è crescente. Per il teorema di regolarità delle successioni monotone, si ha

$$\begin{aligned} \lim_m S_{2m+1} &= \sup_m S_{2m+1} := S_D \\ \lim_m S_{2m} &= \inf_m S_{2m} := S_P \end{aligned}$$

Inoltre, essendo a_n a termini positivi si ha

$$S_{2m+1} = S_{2m} - a_{2m+1} \leq S_{2m}.$$

In particolare, da questa relazione e dalla monotonia di $\{S_{2m+1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ segue

$$S_1 \leq S_{2m+1} \leq S_{2m}.$$

Ovvero $\{S_{2m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ è limitata dal basso e quindi $S_P \in \mathbb{R}$. Infine, utilizzando l'ipotesi che a_n sia infinitesima e risulta

$$S_D = \lim_m S_{2m+1} = \lim_m (S_{2m} - a_{2m+1}) = \lim_m S_{2m} = S_P \in \mathbb{R}.$$

Possiamo applicare il lemma precedente e concludere che $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ovvero la serie alternante converge.

Resta da dimostrare la (12). Per quanto visto, per ogni $m \in \mathbb{N}$, si ha

$$S_{2m+1} \leq \sup_m S_{2m+1} = S_D = S = S_p = \inf_m S_{2m} \leq S_{2m}.$$

Quindi se m è pari, ovvero $m = 2k$, allora

$$0 \leq S_{2k} - S \leq S_{2k} - S_{2k+1} = -(-a_{2k+1}) = a_{2k+1} = a_{m+1}.$$

Se invece m è dispari, ovvero $m = 2k+1$, risulta

$$0 \leq S - S_{2k+1} \leq S_{2k+2} - S_{2k+1} = a_{2k+2} = a_{m+1}.$$

Ciò completa la dimostrazione. □

Esempio 3.1. Serie armonica a segno alterno Si considera

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Tale serie non è assolutamente convergente (in quanto al serie dei suoi valori assoluti è la serie armonica). Ma la successione $a_n = \frac{1}{n}$ risulta positiva, decrescente e infinitesima, dunque per il criterio di Leibnitz tale serie converge.

Anche in questo caso non è semplice determinare S la somma della serie, (vedi Esercizi e §4.5) ma si può approssimarla con un errore fissato mediante la formula (12). Tale relazione significa infatti che l'errore commesso approssimando la somma di una serie a termini alterni con una somma parziale è minore o uguale del valore assoluto del primo termine trascurato.

Nel caso specifico, se vogliamo conoscere S con un errore di un millesimo basterà calcolare la somma parziale S_{999}.

Esempio 3.2. Serie armonica generalizzata a segno alterno Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Per il criterio di Leibnitz essa converge per ogni $\alpha > 0$. Ovviamente la serie non converge per $\alpha \leq 0$ non essendo verificata la condizione necessaria per la convergenza.

Confrontiamo questo risultato con la Proposizione 3.3. Sia $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n^\alpha}$. Se si utilizza il criterio di Raabe

$$\lim_n n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1\right) = \alpha.$$

Quindi se $\alpha > 1$ la serie converge assolutamente e quindi converge, se $\alpha < 1$ la serie diverge assolutamente. Se $\alpha = 1$ si ha la serie armonica a segno alterno che converge per il criterio di Leibnitz. Ma tale criterio si applica anche se $0 < \alpha < 1$, quindi la serie converge pur essendo assolutamente divergente.

Analogamente se si applica il criterio degli infinitesimi

$$\lim_n n^\alpha |a_n| = 1$$

abbiamo informazioni sulla assoluta coinvergenza, e quindi convergenza, nel caso $\alpha > 1$ mentre per $\alpha \leq 1$ si ricorre al criterio di Leibnitz.

4 Complementi sulle serie

4.1 Riordinamenti

Abbiamo visto che l'alterazione di un numero finito di termini di una serie non influisce sul suo carattere. Esaminiamo (senza dimostrazione) alcune proprietà delle serie che riguardano invece l'alterazione di un numero infinito di termini. La situazione è molto più complicata, vengono a mancare per somme infinite proprietà elementari delle somme finite, quali l'associatività e la commutatività.

Il seguente esempio mostra che la somma infinita **non** è associativa. Se infatti la somma infinita fosse associativa, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$, che non è determinata avrebbe due somme diverse

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n = +1-1+1-1+1-1+1+\dots &= (+1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0!!!\\ &= 1+(-1+1)+\dots+(-1+1)+\dots = 1???\end{aligned}$$

Il successivo esempio mostra che la somma infinita **non** è commutativa. Se infatti la somma infinita fosse commutativa, la somma della serie armonica generalizzata a segno alterno $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = S$, sarebbe nulla. Invece, per la stima del resto data dal criterio di Leibnitz, risulta $|S - S_2| \leq a_3$ ovvero $\left|S - 1 + \frac{1}{2}\right| \leq 1/3$ da cui $0 < \frac{1}{6} \leq S \leq \frac{5}{6}$. Usando il Teorema 1.2

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \\ S/2 &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots \end{aligned}$$

Sommando le precedenti due espressioni si osserva che i termini positivi della prima serie restano inalterati, quelli negativi hanno denominatore pari e quindi si dividono tra quelli multipli di 4 e quelli non multipli di 4. I termini negativi il cui denominatore non è multiplo di quattro vengono cancellati nella somma con i termini positivi della seconda serie, i termini negativi il cui denominatore è multiplo di quattro vengono sommati con i termini positivi della seconda serie. Questi hanno denominatore multiplo di 4 e quindi si ottengono termini negativi con denominatore multiplo di 2. Ovvero

$$\frac{3}{2}S = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

Supponendo che la somma infinita commutativa, si avrebbe

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = S$$

Da cui $S = 0$.

Definizione 4.1. Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *ha la proprietà associativa* se per ogni $\{n_k\}$ successione crescene di numeri naturali, la serie di termine generale $b_k = a_{n_{k-1}} + \dots + a_{n_k}$ ha lo stesso carattere della serie a_n

Teorema 4.1. *Ogni serie regolare ha la proprietà associativa*

Dimostrazione. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ regolare e sia $\{n_k\}$ una successione crescente di numeri naturali. Si considera la somma parziale di $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{a_{n_{k-1}} + \dots + a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Risulta

$$T_K = \sum_{k=0}^{K} b_k = \sum_{k=0}^{n_K} a_k = S_{n_K}$$

essendo $\{S_{n_K}\}$ estratta dalla somma parziale relativa alla serie di termine generale a_n. Se $\{S_N\}$ ammette limite, anche la sua estratta e quindi $\{T_K\}$ ammettono lo stesso limite. □

Definizione 4.2. Se $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ è una serie di numeri reali e se $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una bigezione. Dicesi riordinamento di $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{k(n)}$$

Una serie si dice *incondizionatamente convergente* se ogni suo riordinamento è convergente.

Esempio 4.1. Abbiamo visto che la serie armonica a segni alterni non è incondizionantamente convergente.

Teorema 4.2. *Le serie a termini non negativi sono incondizionatamente convergenti*

Dimostrazione. Basta dimostrare che se una serie a termini positivi converge ogni suo riordinamento converge. Viceversa se la serie diverge si procede per assurdo.

Sia $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ a termini non-negativi e convergente. Sia $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una bigezione e si considera la somma parziale relativa alla serie di termine generale $\{a_{k(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Risulta

$$T_m = a_{k(0)} + a_{k(1)} + \cdots + a_{k(m)} \leq a_0 + \cdots + a_{\max\{k(0),\ldots,k(m)\}} = S_{\max\{k(0),\ldots,k(m)\}}.$$

Essendo $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ convergente, per il teorema di regolarità risulta $T_m \leq S_{\max\{k(0),\ldots,k(m)\}} \leq S$ essendo s la somam della serie. Anche il riordinamento è a termini positivi, avendo somma parziale limitata essa è convergente. □

Il successivo risultato (che non dimostriamo) stabilisce l'incondizionata convergenza con ipotesi più deboli.

Teorema 4.3. *Se una serie è assolutamente convergente, ogni suo riordinamento è assolutamente convergente e la somma della serie data e della serie ottenuta riordinandone i termini coincidono.*

Dunque l'assoluta convergenza implica l'incondizionata convergenza. Nel caso in cui l'assoluta convergenza viene a mancare, ma la serie data converge si può procedere come nell'esempio della serie armonica a segno alterno ed ottenere un riordinamento che abbia carattere, e in particolare somma, fissato a priori.

Teorema 4.4. *Sia* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *una serie convergente ma non assolutamente convergente allora*

- *Per ogni $S \in \mathbb{R}$ esiste un riordinamento della serie data convergente ad S;*
- *esiste un riordinamento della serie data divergente positivamente;*
- *esiste un riordinamento della serie data divergente negativamente;*
- *esiste un riordinamento della serie data indeterminato.*

4.2 Il prodotto alla Cauchy di due serie

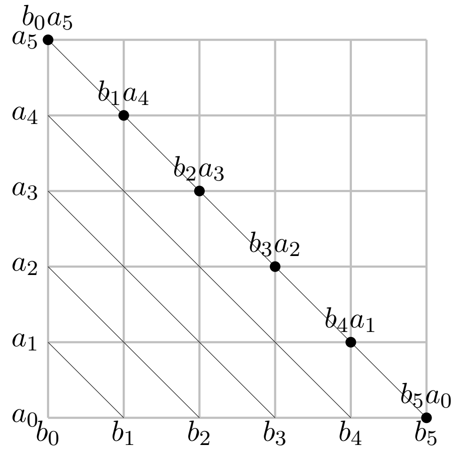
Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie numeriche di numeri reali. Si definisce serie prodotto secondo Cauchy delle due serie, e si denota con

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n,$$

la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \quad \text{tale che } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \tag{13}$$

Il termine n-esimo della serie prodotto secondo Cauchy si ottiene sommando i prodotti dei termini delle due serie la cui somma degli indici è uguale ad n. Nel diagramma seguente, i termini della serie prodotto si ottengono sommando gli elementi delle diagonali. Quindi la somma parziale n-esima della serie prodotto secondo Cauchy si ottiene sommando tutti gli elementi che si trovano al di sotto della diagonale n-esima.



Per comprendere che ci si aspetta un risultato del genere moltiplicando due serie, si provi a moltiplicare due polinomi $(a_n x^n + \cdots + a_0)(b_n x^n + \cdots + b_0)$ e si calcoli il valore del prodotto in $x = 1$, si ottiene uno sviluppo analogo a quello del prodotto alla Cauchy di due serie.
Ci si chiede se il prodotto alla Cauchy di due serie convergenti è una serie convergente e se la sua somma è il prodotto delle somme delle serie di partenza. Questo **non** è vero a meno di ipotesi aggiuntive come illustrato nei successivi risultati.

Teorema 4.5. *Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita da* (13).

i) Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a termini non negativi. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ convergono, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge e risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n. \tag{14}$$

ii) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ convergono assolutamente, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge assolutamente e sussiste (14)

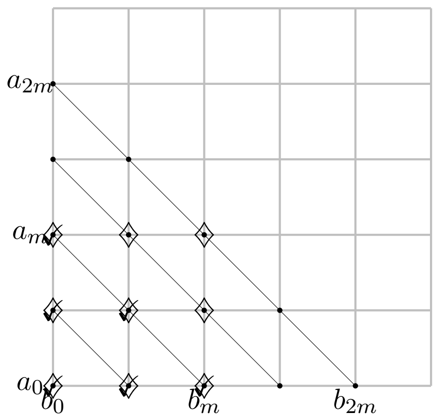
Dimostrazione. **(i)** Si considerano le somme parziali delle tre serie coinvolte

$$A_m = \sum_{n=0}^{m} a_n \quad B_m = \sum_{n=0}^{m} b_n \quad C_m = \sum_{n=0}^{m} c_n$$

La dimostrazione si basa sulla seguente disuguaglianza

$$C_m \le A_m B_m \le C_{2m} \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Non forniamo una dimostrazione induttiva della precedente disuguaglianza ma essa è facilmente visulizzabile nel successivo diagramma dove il segno ✓ denota gli indici coinvolti in C_m, il segno $\diamondsuit$ gli indici coinvolti in A_mB_m e il $\bullet$ gli indici coinvolti nella somma parziale C_{2m}.



Per ipotesi $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sono convergenti, quindi per il teorema di regolarità delle serie a termini positivi, risultano successioni limitate dalla somma delle rispettive serie. Siano $A, B \geq 0$ tali che $\lim_m A_m = A$ e $\lim_m B_m = B$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha $A_m \leq A$ e $B_m \leq B$.
D'altra parte $C_m \leq A_mB_m$ quindi ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta $C_m \leq AB$ e quindi per il teorema di regolarità essendo C_m limitata e somma parziale di una serie a termini positivi, detta serie risulta convergente.

Sia $C = \lim_m C_m$, utilizzando il teorema di confronto per successioni nella (15) si deduce $C = AB$.

(ii) Poichè le serie sono assolutamente convergenti per la prima parte del teorema la serie prodotto delle serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |b_n|$ converge alla somma serie di termine n-esimo

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}b_k|.$$

Essendo $|c_n| \leq \gamma_n$, la serie prodotto alla Cauchy di $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge assolutamente per confronto.

Resta da dimostrare la (14). È sufficiente dimostrare che

$$|A_mB_m - C_m| \leq \sum_{k=0}^{2m} |a_kb_{n-k}| - \sum_{k=0}^{m} |a_kb_{n-k}| \tag{16}$$

supponendo infatti di avere tale disuguaglianza, per $m \to +\infty$ il secondo membro tende a zero e quindi $AB = C$. Cerchiamo mediante il diagramma precedente di capire la disuguaglianza (16). Come visto in precedenza i termini $A_mB_m - C_m$ hanno indici solo nei punti segnati da $\diamondsuit$ ma non segnati da ✓. Possiamo maggiorare aggiungendo i termini in valore assoluto con indice nei punti che hanno l'esclusivo simbolo $\bullet$. Aggiungendo e sottraendo i termini in valore assoluto con indice nei punti contrassegnati sia da $\bullet$, sia da $\diamondsuit$, sia da ✓ si ha la (14).

Questo conclude la dimostrazione □

Enunciamo senza dimostrare, il seguente risultato.

Teorema 4.6.

- *Se* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge assolutamente e* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ *converge, allora la serie prodotto alla Cauchy delle precedenti converge assolutamente e vale l'identità* (14)
- *Se è noto a priori che* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ *converge e se* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ *convergono, allora vale la* (14).

Esempio 4.2. Vi sono serie assolutamente convergenti che moltiplicate danno serie convergenti, e serie convergenti non a termini positivi che moltiplicate per danno serie non convergenti

La serie armonica a segni alterni, moltiplicata per se stessa converge, mentre la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ moltiplicata per se stessa non converge.

Infatti se $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ risulta

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k}}{n-k} \frac{(-1)^k}{k} = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2(n-2)} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right)$$

che converge per il criterio di Leibnitz.

Al contrario se $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ risulta

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}.$$

Osservato che $\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1} \leq \sqrt{k+1}\sqrt{n+1} = n+1$ si ha

$$|c_n| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} = \frac{n+1}{n+1} = 1$$

Essendo violata la condizione necessaria, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ non converge.

4.3 Prodotti infiniti

Assegnata una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali, per ogni $m \in \mathbb{N}$, si definisce *prodotto parziale m-esima di* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ il numero reale

$$P_m := a_0 \cdot a_1 \cdot a_m.$$

La successione $\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ viene denominata *prodotto infinito di termine generale n-esimo* a_n. Un prodotto infinito viene indicata con il simbolo

$$\prod_{n=0}^{+\infty} a_n$$

e talvolta anche con $a_0 \cdot a_1 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot \ldots$.

Si osserva subito che se esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_\nu = 0$ allora per ogni $m \geq \nu$ risulta $P_m = 0$ e quindi la trattazione non è interessante.

Si assuma che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulti $a_n \neq 0$. Ha senso parlare di

$$\lim_m P_m.$$

Si dice che un *prodotto infinito è convergente* se tale limite esiste ed è finito.

Si dice che un *prodotto infinito è divergente positivamente (rsip. negativamente)*se tale limite esiste ed è uguale a $+\infty$ (risp $-\infty$).

Un prodotto infinito si dice regolare se è convergente oppure divergente positivamente oppure divergente negativamente. In tal caso si pone

$$\prod_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_n P_n.$$

Un prodotto infinito non regolare viene denominato *oscillante*.

Teorema 4.7. Condizione necessaria per la convergenza non nulla di un prodotto infinito. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulti $a_n \neq 0$. Se il prodotto infinito $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge a $P \neq 0$ allora $\lim\limits_n a_n = 1$.

Dimostrazione. Utilizzando l'ipotesi $\lim\limits_n P_n = P \neq 0$ e la relazione $a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$ l'asserto segue subito dai teoremi delle operazioni per i limiti di successioni. $\square$

4.4 Successioni e serie in campo complesso

Si considera $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi, ovvero una funzione $n \in \mathbb{N} \mapsto a_n \in \mathbb{C}$.

La successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ si dirà convergente in $\mathbb{C}$ ad un valore $\ell \in \mathbb{C}$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq \nu \text{ risulta } |a_n - \ell| < \varepsilon.$$

Si noti che questa definizione è formalmente analoga a quella della convergenza di una successione reale, ove il modulo "sostituisce "il valore assoluto, ovvero la convergenza ad $\ell \in \mathbb{C}$ della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ equivale alla convergenza a zero della successione reale $\{|a_n - \ell|\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Viceversa non potremo parlare di positiva o negativa divergenza di successioni in $\mathbb{C}$ non essendo tale campo ordinato.

Alla successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vengono associate le successioni reali $\{\mathrm{Re}(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\mathrm{Im}(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definizione 4.3. Si dice che una successione di numeri complessi *diverge in modulo* se

$$\lim_n |a_n| = +\infty$$

ovvero

$$\forall M > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq \nu \text{ risulta } |a_n| > M.$$

Teorema 4.8. *Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ed $\ell \in \mathbb{C}$. Sono equivalenti le sequenti due proposizioni*

a) $\lim\limits_n a_n = \ell$

b) $\lim\limits_n \mathrm{Re}\,(a_n) = \mathrm{Re}\,(\ell) \quad \lim\limits_n \mathrm{Im}(a_n) = \mathrm{Im}\,(\ell)$.

Dimostrazione. La dimostrazione dell'implicazione $a) \Rightarrow b)$ è una semplice applicazione delle disuguaglianze

$$|\text{Re}\,(z)| \leq |z| \quad |\text{Im}|\,(z)| \leq |z|.$$

Viceversa sia dato $\varepsilon > 0$, per ipotesi

$$\exists \nu_1 \in \mathbb{N}, \text{ tale che } \forall n \geq \nu_1 \ : \ |\text{Re}\,(a_n - \ell)| < \varepsilon/\sqrt{2}$$
$$\exists \nu_2 \in \mathbb{N}, \text{ tale che } \forall n \geq \nu_2 \ : \ |\text{Im}\,(a_n - \ell)| < \varepsilon/\sqrt{2}$$

Per $n \geq \nu = max\{\nu_1, \nu_2\}$ risulta

$$|a_n - \ell| = \sqrt{|\text{Re}\,(a_n - \ell)|^2 + |\text{Im}\,(a_n - \ell)|^2} \leq \sqrt{\varepsilon^2/2 + \varepsilon^2/2} = \varepsilon$$

□

Associando ad una successione di numeri complessi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ la successione delle sue somme parziali $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}} = \left\{\sum\limits_{n=0}^{N} a_n\right\}_{N\in\mathbb{N}}$ ha senso parlare di serie in campo complesso indicata con il simbolo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Tale serie si dirà convegente se la successione delle somme parziali $\left\{\sum\limits_{n=0}^{N} a_n\right\}_{N\in\mathbb{N}}$ risulta convergente. In tal caso si pone

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_N \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Il precedente teorema consente immediatamente di dimostrare il successivo risultato.

Teorema 4.9. *Sia* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *una serie di numeri complessi. Le seguenti due proprosizioni sono equivalenti*

a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è convergente*

b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \text{Re}\,(a_n) \quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \text{Im}(a_n)$ *sono convergenti.*

Vera una e quindi ciascuna delle due precedenti proposizioni, risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{R}e\,(a_n) + \text{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \text{I}m\,(a_n).$$

Associando ad una successione di numeri complessi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ la serie di numeri reali $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ si introduce il concetto di *assoluta convergenza o convergenza in modulo.* La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice divergente in modulo se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ diverge positivamente.

Come in campo reale si dimostra che ogni serie complessa assolutamente convergente è convergente.

Lo studio delle serie in campo complesso viene ricondotto in definitiva allo studio delle serie reali.

Esempio 4.3. Se $|z| < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge e risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Viceversa se $|z| \geq 1$ tale serie diverge in modulo. L'insieme di convergenza però non è più un intervallo ma un disco del piano complesso.

4.5 Somma di serie e sviluppi di Taylor

Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia

$$\begin{aligned} T_{n,x_0}[f](x) &:= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

il polinomio di Taylor di grado n in x_0 per f. Siamo tentati di associare a tale polinomio la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

ci chiediamo se tale serie converge e per quali valori di x la somma della serie è proprio $f(x)$

Utilizzando i criteri si ora visti potremo stabilire l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie converge.

La risposta alla seconda domanda è molto più delicata e verrà affrontata nei corsi successivi. Qui ci limitiamo ad asserire che per le funzioni elementari la risposta è positiva. In particolare

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{sen}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad x \in (-1,1]$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

$$\mathrm{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x \in (-1,1].$$

Specificando $x = 1$ ad esempio otteniamo $\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, così come $\lg 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ e $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Indice delle definizioni, dei teoremi, degli esempi fondamentali

4.12 Esempi di prodotto tra serie non assolutamente convergenti

4.13 Definizione di prodotti infiniti

4.14 Condizione necessaria per la convergenza in $\mathbb{R}^*$ di un prodotto infinito.

4.15 Successioni in campo complesso

4.16 Serie in campo complesso

4.17 Somma di serie notevoli mediante lo sviluppo di Taylor di una funzione

Esercizi

E.1 Calcolare il massimo e minimo limite della successione $a_n = (-1)^n \text{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

E.2 Al variare di $r > 1$, determinare, se esiste, il limite della successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = r \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{r}{a_n}\right) \end{cases}$$

E.3 Determinare, se esiste, il limite della successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \end{cases}$$

Scrivere quindi la successione $b_n = a_{n+1}/a_n$ e calcolarne il limite.

E.4 Determinare, se esiste, il limite della successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases}$$

E.5 Determinare, se esiste, il limite della successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = -a_n \end{cases}$$

E.6 Determinare, se esiste, al variare di $\alpha \geq 0$, il limite della successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{na_n}{2n+1} \end{cases}$$

E.7 Determinare, se esiste, il limite della successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 1/3 \\ a_{n+1} = \frac{na_n}{3n+1} + a_n^2 \end{cases}$$

Svolgere lo stesso esercizio per $a_1 = 1$.

E.8 Calcolare il seguente limite

$$\lim_n \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}.$$

E.9 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(\ln(x+x^2)\big)^{-n}$ per tutti gli x per cui la successione $a_n = \big(\ln(x+x^2)\big)^{-n}$ è ben definita.

E.10 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n\alpha^n}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

E.11 Provare che la serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ non è incondizionatamente convergente.

E.12 Provare che è finito il seguente limite (si indica con γ ed è la costante di Eulero Mascheroni).

$$\lim_N \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \lg N \right)$$

E.13 Dimostrare la seguente generalizzazione del Lemma 3.4: ≪ Se possiamo dividere una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tra due sottosuccessioni, in modo che tutti gli elementi della successione appartengano a qualcuna di esse, e se entrambe hanno lo stesso limite ℓ, allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad ℓ.≫

E.14 Verificare che la somma della serie armonica a segno alterno $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ è uguale a $\lg 2$ senza usare gli sviluppi di Taylor. Si dimostri preliminarmente che

$$\sum_{k=1}^{2N} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} X_n = 1 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \ln\frac{4}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} + \ldots \text{ converge}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2N} (-1)^{k+1} X_k + \ln(N+1)$$

(si vedano gli esercizi 6.46,6.47, 6.48 di [8] oppure le dispense dell'anno accademico 2006-2007)

E.15 Completare la dimostrazione del Teorema 1.2.

E.16 Dimostrare la relazione (5), della Proposizione 2.10.

E.17 Saper spiegare perchè sussistono le relazioni (6), (7) nell'Esempio 2.4

E.18 Spiegare in dettaglio l'ultima parte della dimostrazione della Proposizione 2.10: Passando al limsup su n e mandando ε a zero si ha l'asserto.

E.19 Spiegare in dettaglio la disuguaglianza delle somme data dalla relazione (11)

Stabilire il carattere delle seguenti serie e se è possibile calcolarne la somma

S.1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$; $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

S.2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \lg_a \left(\frac{n+1}{n}\right)$ al variare di $a > 0$, $a \neq 1$.

S.3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

S.4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

S.5. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2^{\frac{4n}{3}}$

S.6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$

S.7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n+2}}$.

S.8. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (\sin\beta)^n$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$.

S.9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

S.10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

S.11. $\sum_{n=0}^{+\infty} (x-1)^n$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.

S.12. $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{nx}$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.

S.13. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^\beta n}$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.

S.14. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$.

S.15. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n}$.

S.16. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.

S.17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

S.18. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.

S.19. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$

S.20. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n^n}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

S.21. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right)$.

S.22. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

S.23. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^\beta n}$ al variare di $\beta \in \mathbb{N}$.

S.24. $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n^2+1} - n$

S.25. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}\ln n}$

S.26. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\mathrm{e}^{1/\sqrt{n}} - 1)$

S.27. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$

S.28. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2k+1}{k^4+4k+3}$

S.29. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n+1}$

S.30. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n}$

S.31. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{n!}$

S.32. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+2)}$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.

S.33. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{n 2^n}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

S.34. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\ln(n^2+1)}$.

S.35. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Nota finale

Se questi appunti costituiscono la base dello studio di questo argomento, è altresì importante saper consultare dei testi (vedi bibliografia) e confrontare con essi gli appunti presi a lezione.
Essenzialmente questa trattazione segue i testi [5], (Capitolo 9 eccetto paragrafi §9.5, §9.8) e [1] (Capitolo 9 molti degli argomenti trattati nell'Appendice 9). Per ulteriori approcci più complessi ma anche molto interessanti si consultino [6] e [9].
I cenni dati a lezione sulle successioni definite per ricorrenza si possono ritrovare in [MSCalcolo].
La preparazione relativa agli esercizi parte da quelli svolti in aula ovvero segnalati in questa disoensa, ma va completata svolgendone molti altri che si possono trovare in [8], [2], [7], nelle prove d'appello dell'anno accademico 2006/2007 e in quelle degli anni precedenti del Dott. D'Ambrosio.
Questa dispensa potrebbe contenere sviste ed errori, vi prego di segnalarmeli, ad esempio via email.

Riferimenti bibliografici

[1] Acerbi E., Buttazzo G., *Primo corso di Analisi Matematica*, 1997 Pitagora Editore

[2] Alvino A., Carbone L., Trombetti G., *Esercitazioni di Matematica I/1,2*, 1998 Liguori Editore.

[3] Campiti M., *Analisi Matematica I, Lezioni ed esercizi*, 1995 Liguori Editore.

[4] D'Ambrosio L., *Appunti ed esercizi per il corso di Analisi 2, Anno Accademico 0506.*

[5] Fiorito G., *Analisi Matematica 1*, 2007 Spazio Libri Editore

[6] Giusti E., *Analisi matematica 1*, 1988 Bollati Boringhieri.

[7] Giusti E., *Esercizi e complementi di Analisi matematica 1*, 1991 Bollati Boringhieri.

[MSCalcolo] Marcellini P., Sbordone C., *Calcolo*, 1992 Liguori Editore.

[8] Marcellini P., Sbordone C., *Esercitazioni di matematica. Vol. 1/2*, 1995 Liguori Editore.

[9] Rudin W., *Principi di Analisi matematica*, 1991 McGraw-Hill.