Corso di laurea in Matematica Corso di Analisi Matematica 1-2
Dott.ssa Sandra Lucente [1]

# Formula di Taylor.

*Teorema* 1. Sia $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ una funzione $n$ volte derivabile. Sia $x_0 \in ]a, b[$ esiste un unico polinomio $T_n$ di grado al più $n$ tale che $T_n(x_0) = f(x_0)$ e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Sia $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ una funzione $n$ volte derivabile in $x_0 \in ]a, b[$. Si chiama **polinomio di Taylor di ordine $n$ associato ad $f$ e centrato in $x_0$** il polinomio

$$\begin{aligned} T_{n,x_0}[f](x) &:= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Si chiama **resto $n$-esimo in $x_0$ associato ad $f$** la funzione

$$R_{n,x_0}[f](x) = f(x) - T_{n,x_0}[f](x).$$

Ricordiamo i seguenti risultati.

*Teorema* 2. **Formula di Taylor con il resto di Peano.** Sia $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ una funzione $n$ volte derivabile in $]a, b[$ ed $x_0 \in ]a, b[$. Risulta

$$R_{n,x_0}[f](x) = o(|x - x_0|^n)$$

ovvero

$$f(x) = T_{n,x_0}[f](x) + o(|x - x_0|^n)$$

*Teorema* 3. **Formula di Taylor con il resto di Lagrange.** Sia $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ una funzione $n + 1$ volte derivabile in $]a, b[$. Sia $x_0 \in ]a, b[$ ed $x > x_0$ (risp. $x > x_0$). Esiste $\xi \in ]x_0, x[$ (risp. $\xi \in ]x, x_0[$) tale che

$$R_{n,x_0}[f](x) = \frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

ovvero

$$f(x) = T_{n,x_0}[f](x) + \frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Riguardo al primo enunciato ricordiamo che, se $\alpha > 0$, la notazione $o(|x - x_0|^\alpha)$ indica gli infinitesimi di ordine superiore a $|x - x_0|^\alpha$ per $x \to x_0$ cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{n,x_0}[f](x)}{|x - x_0|^n} = 0$$

[1] Questi appunti potrebbero contenere sviste ed errori, vi prego di segnalarmeli, ad esempio via email. Versione del 10-05-08

Come già visto si hanno le seguenti regole riguardanti l'algebra degli infinitesimi:

(1) $$ko(|x-x_0|^\alpha) = o(|x-x_0|^\alpha)$$

(2) $$|x-x_0|^\alpha = o(|x-x_0|^{\alpha-\epsilon}) \quad 0 < \epsilon \le \alpha$$

(3) $$o(|x-x_0|^\alpha) + o(|x-x_0|^\alpha) = o(|x-x_0|^\alpha)$$

(4) $$o(|x-x_0|^\alpha) + o(|x-x_0|^\beta) = o(|x-x_0|^{\min\{\alpha+\beta\}})$$

(5) $$o(|x-x_0|^\alpha + |x-x_0|^\beta) = o(|x-x_0|^{\min\{\alpha+\beta\}})$$

(6) $$o(o(|x-x_0|^\alpha)) = o(|x-x_0|^\alpha)$$

(7) $$o(|x-x_0|^\alpha + o(|x-x_0|^\alpha)) = o(|x-x_0|^\alpha)$$

(8) $$o(|x-x_0|^\alpha + |x-x_0|^{\alpha+\beta}) = o(|x-x_0|^\alpha)$$

(9) $$|x-x_0|^\alpha \cdot o(|x-x_0|^\beta) = o(|x-x_0|^{\alpha+\beta})$$

(10) $$o(|x-x_0|^\alpha) \cdot o(|x-x_0|^\beta) = o(|x-x_0|^{\alpha+\beta})$$

(11) $$\frac{o(|x-x_0|^\alpha)}{o(|x-x_0|^\beta)} = o(|x-x_0|^{\alpha-\beta}) \quad \alpha \ge \beta$$

(12) $$(o(|x-x_0|^\alpha))^\gamma = o(|x-x_0|^{\alpha+\gamma})$$

essendo $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $k \in \mathbb{R}^*$.
In particolare NON SUSSISTE $o(|x-x_0|^\alpha) - o(|x-x_0|^\alpha) = 0$ !!!

**Esercizio fondamentale 1.** Scrivere la formula di Taylor con il resto di Lagrange arrestata all'ordine zero e confrontare con i teoremi noti

**Esercizio fondamentale 2.** Il polinomio di Taylor di ordine $n$ di un polinomio di grado $n$ è....

**Esercizio fondamentale 3.** Provare che per $x_0 = 0$

- Il polinomio di Taylor di una funzione dispari è un polinomio dispari
- Il polinomio di Taylor di una funzione pari è un polinomio pari

## Sviluppi di funzioni elementari in $x_0 = 0$

$$e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \cdots + \tfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\mathrm{sen}(x) = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\log(1+x) = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \tfrac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\tfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\mathrm{arctg} x = x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} + \ldots (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

**Esercizio fondamentale 4.** Fissando $x = 1$ confrontare lo sviluppo di Taylor di $f(x) = e^x$ con la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ deducendone quindi la somma.

**Esercizio fondamentale 5.** Fissando $x \in (-1,1)$ confrontare lo sviluppo di Taylor di $f(x) = \frac{1}{1-x}$ con la serie geometrica.

**Esercizio fondamentale 6.** Rimotivare alla luce degli sviluppi di Taylor la formula $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\theta$ che definisce la notazione esponenziale dei numeri complessi.

**Esercizio fondamentale 7.** Mostrare che nel caso $\alpha = n \in \mathbb{N}$ lo sviluppo di Taylor di $(1+x)^n$ coincide con il binomio di Newton.

**Esercizio fondamentale 8.** Mediante i precedenti sviluppi di Taylor ritrovare i limiti notevoli per le formule $\left[\frac{0}{0}\right]$.

*Proposizione* 1. Sia $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ una funzione $n+1$ volte derivabile in $]a,b[$. Allora

$$D\left(T_{n,x_0}[f]\right)(x) = T_{n-1,x_0}[f'](x).$$

Testi

I grafici sottostanti sono presi dal testo: ANALISI MATEMATICA Dal calcolo all'analisi Volume 1 (Conti Ferrario Terracini Verzini) Apogeo editore.
Esercizi pi complessi sulla formula di Taylor si trovano su ESERCIZI E COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA 1 (Giusti) Bollati Boringhieri editore.

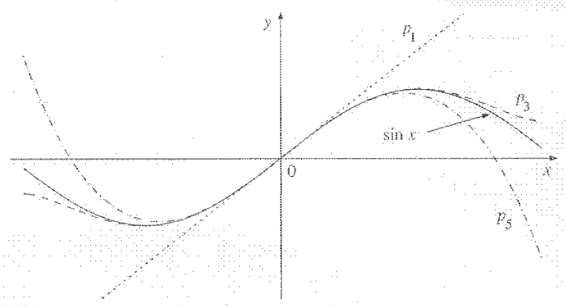


FIGURA 1 al crescere di $n$ il grafico del polinomio di Taylor si avvicina sempre più a quello di $\sin x$ vicino all'origine.

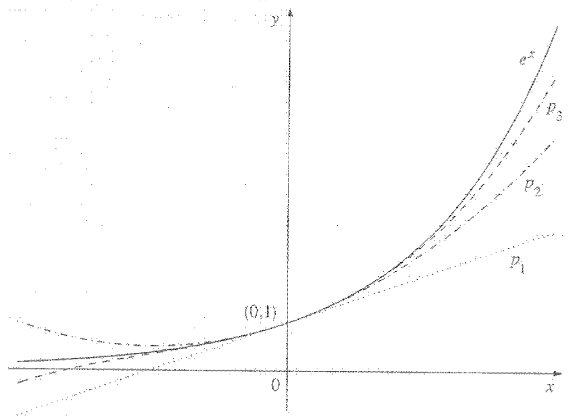


FIGURA in figura sono illustrati i grafici di $f(x) = e^x$ e quelli dei tre polinomi che la approssimano all'ordine 1, 2 e 3.

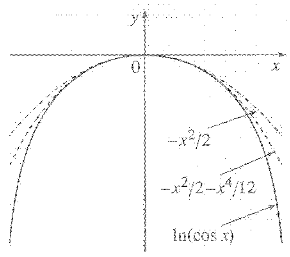


FIGURA grafici della funzione $\ln(\cos x)$ e dei suoi polinomi di Maclaurin di ordine 2 e 4.