Corso di laurea in Matematica Corso di Analisi Matematica 1-2

Dott.ssa Sandra Lucente [1]

Trigonometria: breve riepilogo.

Definizioni iniziali

- Saper misurare un angolo in gradi sessagesimali, saper svolgere le operazioni di addizione, sottrazioni, moltiplicazione e divisione nel sistema sessagesimale.
- Saper misurare un angolo in radianti. Saper convertire la misura di un angolo da gradi a radianti.
- Saper definire la circonferenza goniometrica.
- Saper utilizzare per le operazioni precedenti la calcolatrice scientifica.
- Saper associare ad un qualunque numero reale un angolo orientato e quindi un punto della circonferenza goniometrica.
- Saper associare ad un punto della circonferenza goniometrica, determinato all'angolo x il punto di coordinate $(\cos x, \mathrm{sen} x)$ e quando è possibile, i punti di coordinate $(1, \mathrm{tg} x)$, $(\mathrm{cotg} x, 1)$, $(0, \sec x)$, $(\mathrm{cosec} x, 0)$.

Avendo associato ad ogni numero reale un angolo, ed avendo associato gli angoli le precedenti quantità goniometriche, possiamo considerare le funzioni:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, x \mapsto \mathrm{sen} x\\
&\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, x \mapsto \cos x\\
&\mathrm{tg} : \mathbb{R} \setminus \cup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \to \mathbb{R}\,, x \mapsto \mathrm{tg} x\\
&\mathrm{cotg} : \mathbb{R} \setminus \cup_{k\in\mathbb{Z}} k\pi \to \mathbb{R}\,, x \mapsto \mathrm{cotg} x\\
&\sec : \mathbb{R} \setminus \cup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \to \mathbb{R}\,, x \mapsto \sec x\\
&\mathrm{cosec} : \mathbb{R} \setminus \cup_{k\in\mathbb{Z}} k\pi \to \mathbb{R}\,, x \mapsto \mathrm{cosec} x
\end{aligned}
$$

In particolare, geometricamente si giustificano le seguenti formule fondamentali della trigonometria

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1\\
&\mathrm{tg} x = \frac{\mathrm{sen} x}{\cos x} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}\\
&\mathrm{cotg} x = \frac{\cos x}{\mathrm{sen} x} \quad x \neq k\pi \; k \in \mathbb{Z}\\
&\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}\\
&\mathrm{cosec} x = \frac{1}{\mathrm{sen} x} \quad x \neq k\pi \; k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1. Dimostrare le seguenti relazioni

$$
\begin{aligned}
&\sec^2 x - \mathrm{tg}^2 x = 1\\
&\mathrm{cosec}^2 x - \mathrm{cotg}^2 x = 1
\end{aligned}
$$

[1] Questi appunti potrebbero contenere sviste ed errori, vi prego di segnalarmeli, ad esempio via email. Versione del 3-12-09

Formule degli archi associati

Usando la circonferenza goniometrica si giustificano le seguenti formule:

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi - x) &= \cos x & \mathrm{sen}(2\pi - x) &= -\mathrm{sen}x \\
\cos(2\pi + x) &= \cos x & \mathrm{sen}(2\pi + x) &= \mathrm{sen}x \\
\cos(\pi - x) &= -\cos x & \mathrm{sen}(\pi - x) &= \mathrm{sen}x \\
\cos(x - \pi) = \cos(\pi + x) &= -\cos x & \mathrm{sen}(x - \pi) &= \mathrm{sen}(\pi + x) = -\mathrm{sen}x \\
\cos(-x) &= \cos x & \mathrm{sen}(-x) &= -\mathrm{sen}x \\
\cos(\frac{\pi}{2} - x) &= \mathrm{sen}x & \mathrm{sen}(\frac{\pi}{2} - x) &= \cos x \\
\cos(\frac{\pi}{2} + x) &= -\mathrm{sen}x & \mathrm{sen}(\frac{\pi}{2} + x) &= \cos x
\end{aligned}$$

Esercizio 2. Ricavare le formule degli archi associati per $\mathrm{tg}x$ sia analiticamente, sia mediante giustificazione con la circonferenza goniometrica. Svolgere lo stesso esercizio per la cotangente.

Esercizio 3. Calcolare $\mathrm{sen}(3\pi/2 + \alpha)$, in funzione di $\mathrm{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$.

Angoli notevoli

I seguenti angoli sono contenuti nel primo quadrante, per trovare altri risultati notevoli usare le formule degli archi associati.

x	$\cos x$	$\mathrm{sen}x$
0	1	0
$\pi/10$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
$\pi/6$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\pi/3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\pi/2$	0	1

Esercizio 4. Determinare, quando è possibile, il valore di $\mathrm{tg}x$ negli angoli dati nella precedente tabella.

Proprietà fondamentali delle funzioni goniometriche

Teorema 1. Sia $f_c(x) = \cos x$.

(1) Il dominio di $f_c(x) = \cos x$ è $\mathbb{R}$.
(2) La funzione $f_c(x) = \cos x$ è 2π periodica (nel seguito viene discussa in $[-\pi, \pi]$).
(3) La funzione $f_c(x) = \cos x$ è pari.
(4) La funzione $f_c(x) = \cos x$ si annulla in $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
(5) La funzione $f_c(x) = \cos x$ è strettamente positiva in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, è strettamente negativa in $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.
(6) La funzione $f_c(x) = \cos x$ è strettamente decrescente in $[0, \pi]$ e strettamente crescente in $[-\pi, 0]$.
(7) L'immagine di $f_c(x) = \cos x$ è $[-1, 1]$, in particolare $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$. In particolare la funzione $f_c(x) = \cos x$ è limitata; tale funzione ha massimo di valore 1 raggiunto nei punti $x = 2k\pi$ con $k \in Z$ e minimo di valore -1 raggiunto nei punti $x = \pi + 2k\pi$ con $k \in Z$;
(8) Esiste l'inversa della ridotta della restrizione di $f_c(x) = \cos x$ all'intervallo $[0, \pi]$ e si chiama funzione $\arccos x$. In particolare la funzione $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ è strettamente decrescente.

Dimostrazione.

(1) Per definizione.
(2) Segue dalle formule degli archi associati.
(3) Segue dalle formule degli archi associati.
(4) Segue dalle formule degli angoli notevoli e degli archi associati.
(5) Ad angoli orientati $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ corrispondono punti della circonferenza goniometrica aventi ascissa positiva; ad angoli orientati $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ corrispondono punti della circonferenza goniometrica aventi ascissa negativa.
(6) Siano assegnati gli angoli orientati $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$. I corrispondenti punti sulla circonferenza hanno ascissa $\cos x_2 < \cos x_1$. Se $-\pi \leq x_1 < x_2 \leq 0$ allora $0 \leq \pi + x_1 < \pi + x_2 \leq \pi$ e per quanto visto risulta $\cos(\pi + x_2) < \cos(\pi + x_1)$. Dalle formule degli archi associati si ha poi $-\cos(x_2) < -\cos(x_1)$ da cui $\cos(x_1) < \cos(x_2)$.
(7) Sia $a \in [-1, 1]$ e si consideri la retta di equazione $X = a$ nel riferimento cartesiano XOY in cui si interseca con la circonferenza goniometrica $X^2+Y^2 = 1$. Si ottiene $Y^2 = 1-a^2$ che per il teorema della radice ennesima ha soluzione quando $1 - a^2 \geq 0$, ovvero nelle nostre ipotesi. A tali punti $P_\pm(a, \pm\sqrt{1 - a^2})$ corrispondono gli angoli orientati z_k tali che $\cos z_k = a$. In particolare questi angoli costituiscono due insiemi. In ciascuno di questi insiemi gli elementi differiscono tra loro di 2π. Possiamo ordinare questi insiemi in modo che i loro elementi si scrivano nella forma $z'_k = z_+ + 2k\pi$ e $z''_k = z_- + 2k\pi = -z_+ + 2k\pi$. Per $k = 0$ si ha $z_+ \in [0, \pi]$ e $z_- \in [-\pi, 0]$.
(8) Dal punto (6) si ha l'ingettività di $f_c(x) = \cos x$ in $[0, \pi]$, dal punto (7) segue la surgettività di f_c ristretta a $[0, \pi]$ su $[-1, 1]$, quindi si costriusce l'inversa della ridotta della restrizione della funzione $f_c(x) = \cos x$ e conserva la stessa monotonia della funzione di partenza.

□

Esercizio 5. Disegnare nello stesso riferimento cartesiano i grafici delle funzioni $f_c(x) = \cos x$ e $f_c^{-1}(x) = \arccos x$

Teorema 2. Sia $f_s(x) = \text{sen}x$.

(1) Il dominio di $f_s(x) = \text{sen}x$ è $\mathbb{R}$;
(2) La funzione $f_s(x) = \text{sen}x$ è 2π-periodica (nel seguito viene discussa in $[-\pi, \pi]$);
(3) La funzione $f_s(x) = \text{sen}x$ è dispari;
(4) La funzione $f_s(x) = \text{sen}x$ si annulla in $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$;
(5) La funzione $f_s(x) = \text{sen}x$ è strettamente positiva in $]0, \pi[$, strettamente negativa in $]-\pi, 0[$;
(6) La funzione $f_s(x) = \text{sen}x$ è strettamente crescente in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e strettamente decrescente in $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ e $[\frac{\pi}{2}, \pi]$;
(7) L'immagine di $f_s(x) = \text{sen}x$ è $[-1, 1]$, in particolare $\text{sen}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$. In particolare la funzione $f_s(x) = \text{sen}x$ è limitata; tale funzione ha massimo di valore 1 raggiunto nei punti $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in Z$ e minimo di valore -1 raggiunto nei punti $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in Z$;
(8) Esiste l'inversa della ridotta della restrizione di $f_s(x) = \text{sen}x$ all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e si chiama funzione $\text{arcsen}x$. In particolare la funzione $\text{arcsen} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è strettamente crescente e dispari.

Dimostrazione.

(1) Per definizione.
(2) Segue dalle formule degli archi associati.
(3) Segue dalle formule degli archi associati.
(4) Segue dalle formule degli angoli notevoli e degli archi associati.
(5) Ad angoli orientati $x \in]0, \pi[$ corrispondono punti della circonferenza aventi ordinata positiva; ad angoli orientati $x \in]-\pi, \pi[$ corrispondono punti della circonferenza aventi ordinata negativa.
(6) Siano assegnati gli angoli orientati $-\pi/2 \leq x_1 < x_2 \leq \pi/2$. I corrispondenti punti sulla circonferenza hanno ordinata $\text{sen}x_1 < \text{sen}x_2$. Se invece $\pi/2 \leq x_1 < x_2 \leq 3/2\pi$ allora $-\pi/2 \leq x_1 - \pi < x_2 - \pi \leq \pi/2$ e per quanto visto risulta $\text{sen}(x_1 - \pi) < \text{sen}(x_2 - \pi)$. Dalle formule degli archi associati si ha poi $-\text{sen}(x_1) < -\text{sen}(x_2)$ da cui $\text{sen}(x_2) < \text{sen}(x_1)$.
(7) Sia $b \in [-1, 1]$ e si consideri la retta di equazione $Y = b$ nel riferimento cartesiano XOY in cui si interseca con la circonferenza goniometrica $X^2 + Y^2 = 1$. Si ottiene $X^2 = 1 - b^2$ che per il teorema della radice ennesima ha soluzione quando $1 - b^2 \geq 0$, ovvero nelle nostre ipotesi. A tali punti $P_\pm(\pm\sqrt{1 - b^2}, b)$ corrispondono gli angoli orientati z_k tali che $\text{sen}z_k = b$. In particolare questi angoli costituiscono due insiemi. In ciascuno di questi insiemi gli elementi differiscono tra loro di 2π. Possiamo ordinare questi insiemi in modo che i loro elementi si scrivano nella forma $z'_k = z_+ + 2k\pi$ e $z''_k = z_- + 2k\pi = \pi - z_+ + 2k\pi$. Per $k = 0$ si ha $z_\pm \in [0, \pi]$ se $b \geq 0$ mentre $z_\pm \in [-\pi, 0]$ se $b \leq 0$.
(8) Dal punto (6) si ha l'ingettività di $f_s(x) = \text{sen}x$ in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dal punto (7) segue la surgettività di f_s ristretta a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ su $[-1, 1]$, quindi si costruisce l'inversa della ridotta della restrizione della funzione $f_s(x) = \text{sen}x$ e conserva la stessa monotonia e disparità della funzione di partenza.

□

Esercizio 6. Disegnare nello stesso riferimento cartesiano i grafici delle funzioni $f_s(x) = \text{sen}_s x$ e $f_s^{-1}(x) = \text{arcsen}x$

Esercizio fondamentale 1. Determinare il dominio naturale delle funzioni

$$f(x) = \text{arcsen}(\text{sen}(x)), \quad g(x) = \text{sen}(\text{arcsen}(x))$$

e tracciarne il grafico.

Teorema 3. Sia $f_t(x) = \text{tg}x$.

(1) Il dominio di $f_t(x) = \text{tg}x$ è $\mathbb{R} \setminus \cup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$.
(2) La funzione $f_t(x) = \text{tg}x$ è π periodica (nel seguito viene discussa in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).
(3) La funzione $f_t(x) = \text{tg}x$ è dispari.
(4) La funzione $f_t(x) = \text{tg}x$ si annulla in $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
(5) La funzione $f_t(x) = \text{tg}x$ è strettamente positiva in $]0, \frac{\pi}{2}[$, è strettamente negativa in $]-\frac{\pi}{2}, 0[$.
(6) La funzione $f_t(x) = \text{tg}x$ è strettamente crescente in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
(7) L'immagine di $f_t(x) = \text{tg}x$ è $\mathbb{R}$, in particolare $\text{tg}(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$.
(8) Esiste l'inversa della restrizione di $f_t(x) = \text{tg}x$ all'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e si chiama $\text{arctg}x$. In particolare la funzione $\text{arctg} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ è strettamente crescente e dispari.
(9) Il coefficiente angolare di una retta è la tangente dell'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse.

Dimostrazione

(1) Per definizione.
(2) Segue dalle formule degli archi associati.
(3) Segue dai due precedenti teoremi.
(4) Segue dai due precedenti teoremi.
(5) Segue dai due precedenti teoremi.
(6) Segue dai due precedenti teoremi.
(7) Sia $m \in \mathbb{R}$ e si consideri la retta di equazione $Y = mX$ nel riferimento cartesiano XOY in cui si interseca con la retta $X = 1$. Si ottiene il punto $(m, 1)$ a cui corrispondono gli angoli orientati z_k tali che $\text{tg}z_k = m$. Questi angoli costituiscono un insieme i cui elementi differiscono tra loro di π. Ovvero si scrivono nella forma $z_k = z_0 + k\pi$. Possiamo ordinare l'insieme in modo che per $k = 0$ si abbia $z_0 \in]-\pi/2, \pi/2[$.
(8) Dal punto (6) si ha l'ingettività di $f_t(x) = \text{tg}x$ in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, dal punto (7) segue la surgettività di f_t, quindi si costruisce l'inversa della restrizione della funzione $f_s(x) = \text{tg}x$ e conserva la stessa monotonia e disparità della funzione di partenza.
(9) Riguardando il punto (7) si comprende il significato geometrico della quantità $\text{tg}x$.

□

Esercizio 7. Disegnare nello stesso riferimento cartesiano i grafici delle funzioni $f_t(x) = \text{tg}_s x$ e $f_t^{-1}(x) = \text{arctg}x$

Esercizio fondamentale 2. È corretto dire che la funzione $f_t(x) = \text{tg}x$ è strettamente crescente?

Teorema 4. Per ogni $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ risulta $0 < \text{sen}x < x < \text{tg}x$.

Esercizio fondamentale 3. Dedurre dal precedente teorema che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $|\text{sen}x| \leq |x|$.

Formule di addizione e sottrazione

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ risultano vere le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \text{sen}x\,\text{sen}y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \text{sen}x\,\text{sen}y \\
\text{sen}(x+y) &= \text{sen}x \cos y + \cos x\,\text{sen}y \\
\text{sen}(x-y) &= \text{sen}x \cos y - \cos x\,\text{sen}y
\end{aligned}$$

Esercizio 8. Dare le formule di addizione e sottrazione della tangente per gli angoli per cui ha senso. In particolare si esprima $\mathrm{tg}(x+y)$ solo in funzione di $\mathrm{tg}x$ e di $\mathrm{tg}y$. Svolgere l'analogo esercizio per la cotangente.

Esercizio 9. Ricavare $\mathrm{sen}(\pi/12)$, $\cos(\pi/12)$, $\mathrm{sen}(7\pi/12)$, $\cos(7\pi/12)$, $\mathrm{sen}(2\pi/3)$, $\cos(2\pi/3)$

Teorema 5. Esiste un unica coppia di funzioni (f_c, f_t) da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che verifica le seguenti proprietà

(1) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $f_c^2(x) + f_s^2(x) = 1$;
(2) Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ risulta $f_c(x+y) = f_c(x)f_c(y) - f_s(x)f_s(y)$;
(3) Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ risulta $f_s(x+y) = f_c(x)f_s(y) + f_s(x)f_c(y)$;
(4) Esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $x \in]0, \epsilon_0[$ si ha $0 < f_c(x)$ e $0 < f_s(x) < x < \frac{f_s(x)}{f_c(x)}$.

Formule di duplicazione e bisezione

Applicando le formule di addizione e la relazione $\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, si ha:

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x = 1 - 2\mathrm{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\ \mathrm{sen}(2x) &= 2\mathrm{sen}x \cos x \end{aligned}$$

Esercizio 10. Dare la formula di duplicazione della tangente, per gli angoli per cui ha senso. Svolgere l'analogo esercizio per la cotangente.

Applicando le formule di duplicazione si ha

$$\mathrm{sen}^2(x/2) = \frac{1-\cos x}{2}$$
$$\cos^2(x/2) = \frac{1+\cos x}{2}$$

Attenzione per calcolare $\mathrm{sen}(x/2)$ e $\cos(x/2)$ bisogna scegliere il segno opportuno, as esempio

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}(x/2) &= \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad \text{se } \frac{x}{2} \text{ è nel I o II quadrante} \\ \mathrm{sen}(x/2) &= -\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad \text{se } \frac{x}{2} \text{ è nel III o IV quadrante} \end{aligned}$$

Esercizio 11. Ricavare le formule si bisezione per la tangente e la cotangente.

Esercizio 12. Ricavare le formule di triplicazione per il seno, il coseno e la tangente, ovvero calcolare $\mathrm{sen}(3x)$, $\cos(3x)$, $\mathrm{tg}3x$. Pensare a come si possa iterare il procedimento per calcolare $\mathrm{sen}(nx)$, $\cos(nx)$, $\mathrm{tg}(nx)$ con $n \in \mathbb{N}$.

Formule parametriche

Dalle formule di duplicazione si ricavano anche le seguenti formule che useremo molto spesso in questo corso.

$$\cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} \quad x \neq \pi + 2k\pi \ k \in \mathbb{Z}$$
$$\mathrm{sen}x = \frac{2\mathrm{tg}x/2}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} \quad x \neq \pi + 2k\pi \ k \in \mathbb{Z}$$
$$\mathrm{tg}x = \frac{2\mathrm{tg}x/2}{1-\mathrm{tg}^2(x/2)} \quad x \neq \pi + 2k\pi \ k \in \mathbb{Z}$$

Tali formule si ricavano applicando la formula

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$$

che sarà spesso utile nel seguito del corso.

Formule di Werner e di prostaferesi

Le formule di Werner si deducono mediante combinazione delle formule di addizione e sottrazione:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}x\,\cos y &= \frac{1}{2}(\mathrm{sen}(x+y)+\sin(x-y))\\
\cos x\,\mathrm{sen}y &= \frac{1}{2}(\mathrm{sen}(x+y)-\sin(x-y))\\
\cos x\,\cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x+y)-\cos(x-y))\\
\mathrm{sen}x\,\mathrm{sen}y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))
\end{aligned}$$

Con opportuna sostituzione da queste formule si ricavano quelle di prostaferesi:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}x+\mathrm{sen}y &= 2\mathrm{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\
\mathrm{sen}x-\mathrm{sen}y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\mathrm{sen}\frac{x-y}{2}\\
\cos x+\cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\
\cos x-\cos y &= -2\mathrm{sen}\frac{x+y}{2}\mathrm{sen}\frac{x-y}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 13. Dire se la funzione $f(x) = \mathrm{sen}x + \cos x$ è limitata e in caso affermativo determinarne i massimi e minimi senza l'uso delle derivate.

Applicazione della trigonometria alla geometria euclidea

Sebbene esuli dallo scopo di questo corso, non si può non ricordare che la trigonometria è uno strumento importante per il calcolo delle quantità coinvolte in geometria piana e solida. In particolare si vuole "risolvere "un triangolo cioè trovare i suoi sei elementi (i tre lati e i tre angoli) quando sono noti tre di essi. Lo studente iscritto a matematica non può non conoscere

- Le formule per i triangoli rettangoli;
- La formula dell'area di un triangolo, noto un angolo e due lati;
- Il teorema della corda
- Il teorema dei seni;
- Il teorema del coseno;
- Il teorema delle proiezioni;
- Le formule di Briggs e la formula di Erone.