

ESERCIZI

1. INSIEMISTICA

1.1 Sia Σ l'insieme dei punti dello spazio, Γ una sfera e N il suo polo nord. Quali delle seguenti relazioni sono corrette?

- $N \in \Gamma$;
- $N \in \Sigma$;
- $\Gamma \in \Sigma$;
- $\Gamma \subset \Sigma$;
- $N \subset \Sigma$;
- $\Gamma \in N$.

1.2 Dire quali dei seguenti insiemi sono vuoti e descriverne il complementare nell'insieme dei numeri reali:

- A: = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{3} \text{ e } x \geq \frac{1}{3}\}$;
B: = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{3} \text{ e } x > \frac{1}{3}\}$;
C: = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{3} \text{ e } x \geq \frac{1}{2}\}$;
D: = $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x = 0\}$;
E: = $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x = 1\}$;
F: = $\{x \in \mathbb{N} \mid 3x = 0\}$;
G: = $\{x \in \mathbb{N} \mid 3x = 1\}$.

1.3 Quali e quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme $A = \{a, b, c, d\}$?

Scegliere a, b, c tali che posto $A = \{a, b\}$ e $B = \{c\}$ risulti $A = B$.

1.4 Dati gli insiemi $X = \{0, 1, 2, \sqrt{2}, 1/3\}$, $Y = \{0, 1, -1/2, \sqrt{2}\}$ e $Z = \{1, 2, \sqrt{2}, -1/2\}$ determinare

- $X - Y$;
- $X \cap Y \cap Z$;
- $X \cap (Y \cup Z)$.

1.5 Quali e quante sono le coppie di $A \times A$ essendo $A = \{a, b, c, d\}$?

2. INSIEMI NUMERICI

2.1. Eseguire senza calcolatrice la divisione con resto di 237 per 43 ed esprimere con un'uguaglianza il significato dell'operazione compiuta.

2.1.1 Si consideri il numero $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23$. È possibile decidere se è divisibile per 17 senza eseguire alcuna operazione?

Quali sono i numeri naturali minori di 30 che sono multipli sia di 4 che di 6?

2.1.2 Trovare MCD e mcm di 10002 e 9999.

2.2. Se il prodotto di sette numeri interi è negativo cosa si può dire del segno dei sette fattori?

2.3. Date le frazioni $\frac{3}{7}$ e $\frac{4}{5}$ dire qual è la maggiore e trovare un'ulteriore frazione strettamente compresa tra esse.

2.3.1 Ridurre ai minimi termini la frazione 560/1960.

2.3.2 Scrivere la frazione generatrice di $3,5\overline{27}$.

Senza far uso della calcolatrice, scrivere sotto forma decimale la frazione 41/6.

2.3.3 Riscrivere in ordine crescente i seguenti numeri: $\frac{2}{5}$; 0; -1; 0,91; -3; 0,19; 0,003.

2.4. Siano a, b numeri reali tali che $0 < a \leq b$. Qual è il maggiore tra i numeri $1/a$ e $1/b$?

2.4.1 Il numero $\sqrt{0,9}$ è maggiore, minore o uguale al numero 0,81?

2.4.2 Dati due numeri reali positivi a e b , è più grande la loro media aritmetica $\frac{a+b}{2}$ oppure la loro media geometrica \sqrt{ab} ?

2.4.3 Posizionando sulla retta reale i numeri $1 - 1/2$, $1 - 3/2$, $1 - 1/4$, $-1 + 3/2$, $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ si ottengono 3 segmenti e due semirette. Quale dei segmenti che si formano è il più grande?

2.4.4 Per quali $x \in \mathbb{R}$ risulta $|x - 1| + 2 = 0$?

- 2.4.5 Quale numero razionale corrisponde a 2^{-3} ?
Semplificare l'espressione $(2^{-2})^{-1/2} + (2^{1/2})^{-2}$.
- 2.4.6 Qual è il maggiore tra i numeri $5^{1/3}$ e $3^{1/2}$?
Scrivere il numero $r = \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ nella forma $a + b\sqrt{c}$ con a, b, c numeri razionali.
- 2.4.7 A quale numero naturale corrisponde $3^{2\log_3 10}$?
- 2.4.8 Esprimere $\lg a + \frac{1}{2} \lg b$ come un singolo logaritmo e dire per quali a, b l'espressione ha senso.

3. PIANO CARTESIANO

- 3.1 Rappresentare l'insieme delle coppie (x, y) del piano cartesiano tali che $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$.
- 3.2 Determinare il perimetro del triangolo di vertici $P_1(-2, 1)$, $P_2(2, 4)$, $P_3(-2, 4)$.
- 3.3 Calcolare le coordinate del punto medio del segmento di estremi $P_1(1, -2)$, $P_2(3, 4)$.
- 3.4 Disegnare le rette $y = 2x + 3$, $y = 5$, $x = 0$.
Scrivere l'equazione della retta che passa per i punti $P_1(2, 1)$, $P_2(9, 3)$.
Calcolare l'eventuale punto di intersezione delle rette $x + 2y = 4$, $3x - 2y = 4$.
Scrivere l'equazione della retta che passa per il punto $(2, -1)$ ed è perpendicolare alla retta $4x - 3y + 12 = 0$.
Scrivere l'equazione della retta che passa per il punto $(2, -1)$ ed è parallela alla retta $4x - 3y + 12 = 0$.
Dire se i punti di coordinate $A(1, 1)$, $B(2, -2)$, $C(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ sono allineati.
- 3.5 Determinare la distanza del punto $(3, -2)$ dalla retta $4x - 3y + 12 = 0$.
- 3.6 Calcolare l'eventuale punto di intersezione tra la retta $x + 2y = 10$ e la circonferenza $x^2 + y^2 - 10x = 0$. Disegnare nel piano tale retta e tale circonferenza.
Scrivere l'equazione della retta (è una sola?) passante per il punto $(0, 0)$ e tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$.
Dire per ciascuna delle seguenti equazioni se rappresenta un punto, nessun punto, due punti, una retta, due rette, una circonferenza:
- $x^2 + y^2 - 1 = 0$;
 - $x^2 + y^2 = 0$;
 - $x^2 + y^2 + 1 = 0$;
 - $x^2 + y^2 + 2xy = 0$;
 - $x^2 + y^2 + xy = 0$;
 - $x^2 - y^2 = 0$;
 - $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$;
 - $(x^2 - 1)^2 + y^2 = 0$.
- 3.7 Disegnare la retta $y = x - 1$ e la parabola $y = x^2 - 4x + 3$ trovandone gli eventuali punti di intersezione.
Svolgere lo stesso esercizio per la retta $y = 2x - 1$ e la parabola $y = x^2 - 2x + 3$.
Svolgere lo stesso esercizio per la retta $y = x + 4$ e la parabola $y = 4x - x^2 + 1$.

4. POLINOMI

- 4.1 Semplificare (se possibile) l'espressione

$$\frac{(a+b)^2 - c^2}{c - a - b}.$$

- 4.2 Trovare a, b numeri reali tali che il polinomio $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x - 6$ si possa riscrivere come $a(x-1)^4 + (x-1)^3 + (x-1)^2 + b$.
- 4.3 Calcolare il polinomio somma di $x^2 + 2x + 5$ e $x^3 - x + 2$.
Calcolare il prodotto dei polinomi $x - 1$ e $x^2 + x + 1$.
Eeguire la divisione del polinomio x^4 per il polinomio $x^2 + 1$ ed esprimere con un'uguaglianza il significato dell'operazione eseguita.
Eeguire la divisione del polinomio $2x^4 - 5x^3 + 4x^2$ per il polinomio $x^2 - 2x + 3$ ed esprimere con un'uguaglianza il significato dell'operazione eseguita.

4.4 Eseguire, utilizzando la regola di Ruffini, la divisione $(3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 12) : (x - 2)$ scrivendone preliminarmente il resto.

Decomporre il seguente polinomio $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$ in prodotto di polinomi di primo grado.

4.5 Calcolare $(x - 3)^8$.

È possibile scomporre nel prodotto di due polinomi di grado uno il polinomio $x^2 - 4$? Ed il polinomio $x^2 + 4$?

Scomporre i seguenti polinomi nel prodotto di almeno due polinomi di grado inferiore a quello del polinomio di partenza

- $3x^4 - 19$;
- $x^6 - 64$;
- $x^9 - 512$;
- $x^6 + 64$;
- $x^4 + 1$.

4.6 Decomporre, senza usare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, i seguenti polinomi di secondo grado nel prodotto di due polinomi di primo grado:

- $x^2 - 3x + 12$;
- $x^2 - 7x + 12$;
- $x^2 - 3x$;
- $x^2 - 32$;
- $x^2 - x + 0, 25$.

4.7 Stabilire quante soluzioni negative hanno le equazioni

- $x^2 - 3x + 12 = 0$;
- $x^2 - 7x + 12 = 0$;
- $x^2 + 5x + 12 = 0$;
- $x^2 + 2x + 1 = 0$;
- $x^2 - 32 = 0$;
- $x^2 - x + 0, 25 = 0$.

5. EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

5.1 Dire di quali delle seguenti espressioni è soluzione $x_0 = 2$:

- $(x - 2)^2 = 0$;
- $(x - 2)^2 \geq 0$;
- $x^2 - 3x + 5 \geq 0$;
- $x^2 - 3x + 5 \leq 0$;
- $x \neq 2$;
- $x = 2$.

5.2 Risolvere l'equazione $(2x + 1)(3x - 2)(x + 4) = 0$.

Scrivere un'equazione di terzo grado che abbia per soluzioni i numeri $-1, 4, 11/3$.

Trovare le radici (reali) di $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Risolvere $4x^3 - 12x^2 + 11x - 3 = 0$.

5.3 Determinare i valori di x per i quali risulta $2x - 3 > 0$.

Determinare i valori di x per i quali risulta $-2x > -1$.

5.4 Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 0, 3x + 0, 12y = 0; \\ 5x - 2y = 2. \end{cases}$$

5.5 Risolvere le seguenti disequazioni:

- $4x^2 - 5x + 1 \geq 0$;
- $5x - x^2 \geq 0$;
- $9x^2 - 6x + 1 \geq 0$;
- $4x - 1 - 4x^2 \geq 0$;
- $x^2 + 2x + 4 > 0$;
- $x^2 - 16 < 0$;
- $3 - x^2 > 0$.

5.6 Determinare i valori di x per i quali risulta $x^3 + 2 > 0$.

Risolvere la disequazione $(x^2 - 1)(x^2 - x - 2) > 0$.

Risolvere la disequazione $x^4 - 1 > 0$.

5.7 Risolvere $|x| + |x - 2| \leq x + 1$.

5.8 Determinare le soluzioni delle equazioni

$$\sqrt{x^2} = x, \quad \sqrt{x^2 + 3} = 2x.$$

Determinare le soluzioni della disequazione

$$\frac{1}{\sqrt{x+5}} + 2 \geq 0.$$

5.9 Determinare l'eventuale soluzione dell'equazione $e^{2x-1} = 1$.

Determinare l'eventuale soluzione dell'equazione $10^{2x-1} = -1$.

È vero che per ogni x numero reale risulta $2^x < 3^x$?

5.10 Determinare la soluzione dell'equazione $\log_2(\log_3 x) = 3$.

5.11 Descrivere l'insieme delle soluzioni della doppia disequazione $4 < x^2 < 9$.

Risolvere il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \frac{x^3+8}{x^2-4x+3} \geq 0; \\ 2x-1 \geq 0; \\ x^2-5x \leq 0. \end{cases}$$

Risolvere il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x \leq 1 - 2|x|; \\ 4x^2 + 7x - 2 \leq 0. \end{cases}$$

5.12 Determinare l'insieme dei valori x per i quali risulta

$$\frac{x + \sqrt{2}}{x + \sqrt{3}} \geq 0.$$

Determinare le soluzioni della disequazione

$$\frac{1}{x} + x > 2.$$

Determinare le soluzioni della disequazione

$$\frac{(x^2 - 1)(9 - x^2)}{x^2 - 7x + 12} \geq 0.$$

6. GEOMETRIA PIANA E SOLIDA

6.1 Da un punto interno alla striscia formata da due rette parallele si traccino due rette incidenti tra loro ed alle rette parallele date. Provare che si formano due triangoli simili.

Quale posizione deve avere il punto per poter ottenere due triangoli congruenti?

6.2 Dimostrare che gli assi dei lati di un quadrato si incontrano nello stesso punto di intersezione delle diagonali.

Dati due angoli adiacenti se ne traccino le bisettrici ottenendo due angoli di misura x° e due di misura y° . Calcolare $x^\circ + y^\circ$.

6.3 Qual è la somma degli angoli interni di un pentagono convesso? Costruire un pentagono non convesso con somma degli angoli interni inferiore a quella trovata nell'esercizio precedente.

6.4 Dove si trova il circocentro di un triangolo rettangolo?

6.5 In un triangolo rettangolo si mandi l'altezza relativa all'ipotenusa. Dimostrare che si formano due triangoli simili tra loro e simili a quello di partenza.

6.6 Data un triangolo di lati 3, 4, 5 provare (con strumenti di trigonometria) che il triangolo dato è rettangolo. Determinare (con argomenti di geometria piana) l'altezza relativa all'ipotenusa e le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

- 6.7 Considerata una circonferenza e un punto del piano dire quante tangenti si possono mandare dal punto alla circonferenza a seconda che il punto sia esterno interno o appartenente alla circonferenza.
- 6.8 Una piazza quadrata può essere ricoperta da 100 mattonelle quadrate di lato $1m$. Quante mattonelle di lato $0.5m$ occorrono per ricoprire la stessa piazza? Quanti mattoni cubici di lato $1m$ occorrono per formare una struttura cubica di lato $1m$?
- 6.9 Qual è l'area di un esagono regolare di lato ℓ ?
- 6.10 L'intersezione di due piani distinti nello spazio è una retta se i piani sono incidenti, l'insieme vuoto se i piani sono paralleli. Quali tipi di intersezione si possono presentare se si hanno tre piani distinti nello spazio?
- 6.11 Quanto misura la diagonale di un cubo di lato 1 m ?
Due sfere hanno rispettivamente superficie S_1 ed S_2 e volume V_1, V_2 . Se $S_1 = 4S_2$, qual è il valore del rapporto V_1/V_2 ?

7. CENNI DI TRIGONOMETRIA

- 7.1 Tradurre in radianti la misura degli angoli la cui ampiezza espressa in gradi è pari a 180° , 60° , -45° , 105° .

Tradurre in gradi la misura degli angoli la cui ampiezza espressa in radianti è pari a $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{7}{2}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{\pi}{12}$.

Usando la calcolatrice scientifica si dica quanti gradi vale un radiante approssimando il risultato al decimo di secondo.

- 7.2 Provare che $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

- 7.3 Calcolare

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{7}{4}\pi - \cos(-5\pi)}{(\operatorname{tg} \frac{4}{3}\pi)^2 + \operatorname{sen}(-\frac{5}{6}\pi)}.$$

- 7.4 Determinare le soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x$.

- 7.5 Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni

- $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$;
- $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\operatorname{tg}^2 x < 1$;
- $\cos^2 x < \frac{1}{4}$;
- $\operatorname{sen}^2 x \geq 1$.

- 7.6 Usando la calcolatrice scientifica si approssimino alla prima cifra decimale le quantità $\operatorname{sen}(1^\circ)$ e $\operatorname{sen}(1\text{ radiante})$. Usando la calcolatrice scientifica determinare in radianti il valore dell'angolo $x \in [0, \pi/2]$ tale che $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Svolgere lo stesso esercizio determinando x in gradi per $x \in [90^\circ, 180^\circ]$.

- 7.7 Determinare la misura dell'altezza relativa alla base di un triangolo isoscele avente i lati congruenti di 40 cm e angoli alla base di 30° .