CENNI DI LOGICA MATEMATICA

DOTT.SSA SANDRA LUCENTE [1]

Il linguaggio della logica matematica integra e traduce il linguaggio comune sostituendolo quando questo presenta ambiguità.
Procediamo come quando si impara una nuova lingua. Vi sono frasi (**proposizioni)** molto semplici e regole per metterle insieme.
In matematica hanno senso solo le proposizioni per le quali si può considerare la loro **verità** o falsità.

Esempio 0.1. Per quali tra le seguenti frasi posso parlare di verità?

- Che tempo fa?
- Oggi nevica.
- Se domani piove porterò l'ombrello.
- Se domani piove porterò l'ombrello oppure il l'impermeabile.
- Non sto leggendo questa frase.

Esempio 0.2. Il significato della proposizione "Angelo non è più alto di Tony"

- Angelo è più basso di Tony
- Tony è più alto di Angelo
- Angelo è alto come Tony oppure più basso
- Tony è alto come Angelo oppure più basso

0.1. **Connettivi.**

Per combinare tra loro proposizioni si usano i **connettivi logici** definiti mediante tabelle di verità.

La negazione $\neg$ traduce NON

P	$\neg P$
V	F
F	V

La congiunzione $\wedge$ traduce E

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Quindi la congiunzione è vera se *sia* P *che* Q sono vere.

La disgiunzione $\vee$ traduce la O non esclusiva

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

[1] Questi appunti potrebbero contenere sviste ed errori, vi prego di segnalarmeli, ad esempio via email. Versione del 9 Settembre 2022

La implicazione $\Rightarrow$ traduce il *se ... allora*

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P si chiama Ipotesi Q si chiama Tesi
P è condizione sufficiente per Q
Q è condizione necessaria per P
Talvolta si usa il simbolo $Q \Leftarrow P$ dell'*implicazione contraria.*

L'equivalenza $\Leftrightarrow$ *traduce la doppia implicazione*

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Si dice allora che P è condizione necessaria e sufficiente per Q.

Esempio 0.3. Dire quali delle seguenti frasi sono vere

- 3 è pari $\vee$ 18 è multiplo di 3
- 3 è dispari $\wedge$ 18 è multiplo di 3
- 3 è pari $\wedge$ 18 è multiplo di 3
- 3 è dispari $\vee$ 18 è multiplo di 3

Esempio 0.4. Qual è una condizione necessaria per vincere una partita di calcio? Qual è una condizione sufficiente? Vi è una condizione necessaria anche sufficiente?

Due proposizioni sono equivalenti se hanno la stessa tabella di verità.
Una tautologia logica una affermazione vera per qualsiasi valore di verità degli elementi che la compongono. $P \vee \neg P$ è una tautologia.
Una contraddizione risulta invece sempre falsa qualunque valore di verità venga assegnato ai suoi componenti $P \wedge \neg P$ è una contraddizione.

Esempio 0.5. Dimostrare usando le tabelle di verità che

$$[P \Rightarrow Q] \iff [(\neg P) \vee Q] \tag{1}$$

Ma anche

$$[P \Rightarrow Q] \iff [(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)] \tag{2}$$

Esempio 0.6. Dimostrare usando le tabelle di verità che

$$[(P \wedge Q) \vee R] \iff [(P \wedge R) \vee (P \wedge R)]$$

Ma anche

$$[(P \vee Q) \wedge R] \iff [(P \vee R) \wedge (P \vee R)]$$

Esercizio 0.7. La verità della implicazione può vedersi come una "promessa mantenuta ". Capiamo allora perchè se l'antecedente è falso l'implicazione è vera a partire dal seguente esempio.
Tizio dice a Caio $\langle\langle$Se superi l'esame, allora mi offri una birra.$\rangle\rangle$.

Se Caio ha superato l'esame ed ha offerto la birra tutto va bene. Se Caio non ha superato l'esame e non ha offerto la birra Tizio non può accusarlo di avarizia. Se Caio non ha superato l'esame ed ha offerto la birra ugualmente Tizio non può lamentarsi.
L'unico caso in cui Tizio si potrà lamentare è quello in cui Caio ha superato l'esame ma non offre la birra!

Esempio 0.8. La frase "A è vero se e solo se B è vero" significa

- Quando A è vero B può essere vero o falso
- Quando A è vero B può essere vero
- A e B sono entrambi veri o entrambi falsi
- Quando B è falso A può essere vero o falso

0.2. **Quantificatori.**
I **predicati** sono proposizioni che contengono delle variabili e affermano proprietà di queste. Ad esempio $x \geq 1$, $xy = 54$. Se al posto delle variabili assegno un valore ho una proposizione vera o falsa.

Esercizio 0.9. Consideriamo la proposizione

$$\text{P(x)}:= \text{ il giorno } x \text{ è il compleanno di J.Nash.}$$

al variare di x nei giorni dell'anno. Essa è vera per $x = 13$ *Giugno* ma non è vera se $x = 24\, Febbraio$.

Posso anche scrivere una proposizione che è vera per tutte le variabili di un certo tipo o solo per alcune variabili di un certo tipo.
A questo scopo si utilizzano i **quantificatori**

Per ogni $\forall$ (capovolgimento della lettera A dell'inglese "for all").
Il predicato è vero se è vero per tutti i valori quantificati.

Esercizio 0.10. Riprendendo l'Esempio 0.9, abbiamo che la proposizione "$\forall x$ giorno dell'anno: P(x)"è falsa altrimenti sarebbe sempre il compleanno di J.Nash!

Esercizio 0.11. La proposizione $\forall x \geq 1 : x \geq 0$ è vera. Si legge "Per ogni x maggiore o uguale ad uno risulta x maggiore o uguale a zero"

Esiste $\exists$ (capovolgimento della lettera E dell'inglese "exists ".)
Il predicato è vero se esiste almeno un valore delle variabili per cui il predicato è vero, potrebbe essere vero per più, addirittura infiniti, valori.

Esercizio 0.12. Riprendendo l'Esempio 0.9, abbiamo che la proposizione "$\exists x$ giorno dell'anno: P(x)"è vera.

Esercizio 0.13. Si considera la proposizione $\exists (y, x)$ tale che $y = x^2$. In questo caso le coppie che rendono vera la frase sono infinite.

Esiste uno ed un solo $\exists|$ (esiste soltanto un valore delle variabili per cui il predicato è vero)

Esercizio 0.14. La proposizione $\exists| x \geq 0$ tale che $x^3 = 1$ è vera

È importante capire il ruolo che hanno *per ogni* ed *esiste* in una frase con due variabili quantificate diversamente

Esempio 0.15. Sia X l'insieme delle persone, Y l'insieme delle cose in vendita. Si considera il predicato

$$\mathcal{P}(x,y) := \text{ La persona } x \text{ compra l'oggetto } y.$$

Dire cosa significano le frasi

- $\forall x \in X \exists y \in Y \, : \, \mathcal{P}(x,y)$
- $\exists x \in X \forall y \in Y \, : \, \mathcal{P}(x,y)$

Esercizio 0.16. Rifare l'esercizio precedente con il predicato

$$\mathcal{Q}(x,y) := \text{ La persona } x \text{ compie gli anni il giorno } y.$$

Esercizio 0.17. Dire se sono equivalenti le proposizioni

$$\forall y \in \mathbb{Z}, \; \exists x \in \mathbb{Z} : x+y \text{ risulta divisibile per due}$$
$$\exists y \in \mathbb{Z}, \; \forall x \in \mathbb{Z} : x+y \text{ risulta divisibile per due}$$

Esercizio 0.18. Negare la proposizione "C'è un quaderno dello scaffale che ha copertina bianca oppure copertina azzurra".

Attenzione è importante conoscere l'*universo* su cui sta agendo il quantificatore.

Esercizio 0.19. Si consideri la frase

$$\text{Il cantante } x \text{ ha avuto } y \text{ visualizzazioni per il suo video } z$$

Specificare x o y o z in modo che siano singolarmente vere le frasi

$$\exists x Q(x, 100000, z) \tag{3}$$
$$\forall x \forall z Q(x,y,z) \tag{4}$$
$$\exists! x Q(x, 7.8 miliardi, z) \tag{5}$$

0.3. **Altri segni.**
I predicati hanno come nella lingua italiana dei verbi. La maggiorparte di questi si definisce. È invece primitiva l'**uguaglianza =.** NON USARE MAI L'UGUAGLIANZA IN LUOGO DELLA IMPLICAZIONE E CONTROLLARE SEMPRE CHE DUE QUANTITÀ DICHIARATE UGUALI SIANO DAVVERO UGUALI TRA LORO.

Esempio 0.20. Correggere il seguente stralcio di compito

$$0 = x^2 + x - 2 \quad =$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = -2, 1.$$

Altri segni usuali sono

- $\ni'$ sta per *tale che.*
- : sta per *risulta,* ovvero *si ha.* In alcuni testi viene anche usato come *tale che.*
- $A := B$ sta per l'uguaglianza che definisce A come abbreviazione oppure nome nuovo per B, viceversa $A =: B$ definisce B come abbreviazione oppure nome nuovo per A.
- A volta invece di $\wedge$ si usa la virgola tra due proprietà.

A volte si barra per negare (ad esempio $\notin$ oppure $\neq$, $\nexists$) ma non posso barrare il "per ogni" perchè avrebbe un significato ambiguo.

0.4. **Regole per la negazione di proposizioni.** Sussistono le seguenti

$$\begin{array}{rcl}
\neg(\neg P) & \iff & P \\
\neg(P \vee Q) & \iff & \neg P \wedge \neg Q \\
\neg(P \wedge Q) & \iff & \neg P \vee \neg Q \\
\neg(P \Rightarrow Q) & \iff & P \wedge \neg Q \\
\neg(\forall x\, P(x)) & \iff & \exists x\, \neg P(x) \\
\neg(\exists x, P(x)) & \iff & \forall x : \neg P(x)
\end{array}$$

La prima proprietà ci dice che la negazione è involutoria
La quarta proprietà si prova usando le precedenti e la (1).
Commentiamo le ultime due proprietà: per provare che è falsa una frase con "per ogni" deve essere vera la sua negazione cioè si trova un **controesempio**. Per trovare che è vera una frase con "esiste" devo trovare un **esempio**.

Esempio 0.21. Ultima di campionato di calcio. Vittoria a 3 punti, pareggio ad 1. La classifica è: Juventus 80, Inter 79, Roma 78
La Roma vince il campionato se
[Juve perde]$\wedge$ [Inter perde o pareggia] $\wedge$ [Roma vince]
La Roma non vince il campionato se
$\neg$[[Juve perde]$\wedge$ [Inter perde o pareggia] $\wedge$ [Roma vince]]
ovvero
$\neg$[Juve perde]$\vee$ $\neg$[Inter perde o pareggia] $\vee$ $\neg$[Roma vince] ovvero [Juve non perde]$\vee$ [Inter non perde nè pareggia] $\vee$ [Roma non vince]

Esempio 0.22. Qual è la negazione di "Tutti i greci sono intonati, atletici e bruni"?

Esempio 0.23. Dire se è vera la proposizione "Ogni triangolo ha due lati uguali". Se è falsa trovare un controesempio.

Esempio 0.24. Dire se è vera la proposizione "Esiste un rettangolo con tutti i lati uguali".

0.5. **Vari tipi di dimostrazione.** Una definizione è una abbreviazione, una convenzione. Ma non sempre è facile dare una buona definizione! Buona definizione vuol dire che contenga tutte le informazioni che stiamo abbreviando. (esempio $\mathbb{N}$)
Un teorema (lemma, proposizione o corollario) è una proposizione vera .
Un teorema può essere dato nella forma $P \Rightarrow Q$ con P vera.
Dimostrare $P \Rightarrow Q$ significa esporre un ragionamento che provi la verità della implicazione (cioè di Q). Nel caso P falsa infatti l'implicazione è vera e non si deve dimostrare nulla.
Ricordando la (2), vediamo che vi sono due possibilità.
• Dimostrazione diretta $P \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow ... \Rightarrow P_n \Rightarrow Q$.
• Dimostrazione per assurdo $\neg Q \Rightarrow Q_1 \Rightarrow Q_2 \Rightarrow ... \Rightarrow Q_n \Rightarrow \neg P$.

Esempio 0.25. Olimpiadi 2004. Gara di nuoto, 400 metri. Eliminatorie e finali. Dire se è vera la proposizione "Chi consegue il nuovo record del mondo ha vinto la medaglia d'oro". Se no, aggiungere una ipotesi che dia una frase vera e dimostrarla prima in modo diretto e poi per assurdo.

Esempio 0.26. Dimostrare per via diretta e per assurdo la seguente proposizione "IL QUADRATO DI UN NUMERO PARI È PARI E IL QUADRATO DI UN NUMERO DISPARI È DISPARI"

È allora evidente che per dimostrare un teorema devo conoscere altri teoremi (le implicazioni intermedie). Andando a ritroso capiamo che è necessario assumere un certo numero di proposizioni vere come postulati o assiomi: decidiamo noi che sono vere. Ovvero noi scegliamo di sviluppare una teoria partendo da tali verità. (Esempio assiomi geometria euclidea) Gli assiomi non devono dar luogo a contraddizioni (non devo poter dimostrare P e $\neg P$) e non devono essere troppi.

Noi non partiremo dal principio, non daremo degli assiomi ma li sottintenderemo. Ad esempio riferendoci agli insiemi dei numeri naturali diremo

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Se volessimo davvero definire $\mathbb{N}$ dovremmo dire che è un modello di insieme che verifica i cinque assiomi di Peano

(1) Esiste un numero naturale.
(2) Ogni numero naturale ha un numero naturale successore
(3) Esiste un numero naturale (detto zero, indicato con 0) che non è successore di nessun numero.
(4) Due numeri naturali con lo stesso successore coincidono.
(5) L'unico sottoinsieme dei numeri naturali che contiene lo zero e il successore di tutti i suoi elementi è l'insieme di tutti i naturali.

Attenzione qui stiamo contemporaneamente definendo il successore! E nemmeno siamo sicuri che esista un modello per questi assiomi. La definizione di $\mathbb{N}$ richiede quindi un passaggio logico. Per questo, torniamo come in tutti i testi a scrivere

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

senza preoccuparci di definirlo. (Ovvero lo studente può dimenticare gli assiomi di Peano!) Proprio relativante ad $\mathbb{N}$ vedremo che, vi è un diverso tipo di definizione (per ricorrenza, usando l'idea di successore) e persino un terzo tipo di dimostrazione, detto *per induzione* che discende dall'ultimo assioma di Peano.

Testi consigliati

[1] Acerbi E., Buttazzo G., *Matematica preuniversitaria di base*, 2003 Pitagora Editore[2]

[2] Barbero S., Mosconi S.J.N., Portaluri A., *Precorso di Matematica*, Pearson 2022

[3] Barbuto, *Matematica per i precorsi*, Edises 2011

[4] Boieri P., Chiti G., *Precorso di Matematica*, Zanichelli 1994

[5] Bramanti M., *Precalcolus*, Esculapio 2007

[2] Questo testo è estratto dal testo Acerbi E., Buttazzo G., *Primo corso di Analisi Matematica*, 1997 Pitagora Editore